3.2 Ordered Field

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติของสนามอันดับ โดยในส่วนแรกนี้ เราจะสมมติให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงและมีการดำเนินการ "การบวก" (addition) "+"
และ "การคูณ" (multiplication) "·"
โดยมีสมบัติดังนี้

(A1) For all $x, y \in \mathbb{R}$, $x+y \in \mathbb{R}$ and if $x = w$ and $y = z$, then $x+y = w+z$.

(A2) For all $x, y \in \mathbb{R}$, $x+y = y+x$.

(A3) For all $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.

(A4) There is a unique real number 0 such that $x+0 = x$ for all $x \in \mathbb{R}$.

(A5) There is a unique real number $(-x)$ such that $x+(-x) = 0$.

(M1) For all $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y \in \mathbb{R}$, and if $x = w$ และ $y = z$, then $x \cdot y = w \cdot z$.

(M2) For all $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$.

(M3) For all $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(M4) There is a unique real number $1 \neq 0$ and $x \cdot 1 = x$ for all $x \in \mathbb{R}$.

(M5) For each $x \in \mathbb{R}$ with $x \neq 0$, there is a unique real number $1/x \in \mathbb{R}$ such that $x \cdot (1/x) = 1$. บางครั้ง เราจะเขียนแทนด้วย x^{-1} หรือ $\frac{1}{x}$

(DL) For all $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

เราจะเรียกสมบัติ 11 ข้อนี้ว่า สัจพจน์สนาม (field axiom)
และในที่นี้ เรานิยามผลต่าง (difference)

$$x - y = x + (-y)$$

และผลหาร

$$\frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

ในส่วนต่อไปนี้ เราจะพูดถึงสัจพจน์อันดับ (order axiom) ของจำนวนจริง โดยการพิจารณาสมบัติของความสัมพันธ์ "$<$" ทั้งนี้เราจะนิยาม

$x > y$ แทน $y < x$,

$x \leq y$ แทน $x < y$ or $x = y$

และ

$$x \geq y \quad \text{ใช้} \quad y < x \text{ or } x = y$$

เราจะเรียกจำนวนจริง x ว่าไม่เป็นจำนวนจริงลบ (nonnegative number) ถ้า $x \geq 0$ และ จำนวนจริงบวก (positive number) ถ้า $x > 0$
นอกจากนี้ ถ้า $x, y, z \in \mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับ
$x < y$ และ $y < z$ เราจะเขียนแทนด้วย $x < y < z$

กำหนดให้ความสัมพันธ์ "$<$" สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

(O1) For all $x, y \in \mathbb{R}$, exactly one of the relations

$$x = y, \quad x < y, \quad \text{or} \quad x > y$$

holds. (trichotomy, สมบัติไตรวิภาค)

(O2) For all $x, y, z \in \mathbb{R}$, if $x < y$ and $y < z$, then $x < z$.

(O3) For all $x, y, z \in \mathbb{R}$, if $x < y$, then $x + z < y + z$.

(O4) For all $x, y, z \in \mathbb{R}$, if $x < y$ and $z > 0$, then $x \cdot z < y \cdot z$.

Theorem: Let x, y and z be real numbers.

(a.) If $x+z=y+z$, then $x=y$.

(b.) $x \cdot 0 = 0$.

(c) $-0 = 0$.

(d) $(-1) \cdot x = -x$.

(e) $xy = 0$ iff $x=0$ or $y=0$

(f) $x<y$ iff $-y<-x$

(g) If $x<y$ and $z<0$, then $x \cdot z > y \cdot z$.

Proof. (a.) สมมติให้ $x+z=y+z$
เนื่องจาก $z \in \mathbb{R}$ โดย (A5) จะได้ว่ามีจำนวนจริง $(-z)$
ที่ทำให้ $z+(-z)=0$
เนื่องจาก $x+z=y+z$ และ $(-z) \in \mathbb{R}$ โดย (A1)
จะได้ว่า $(x+z)+(-z) = (y+z)+(-z)$
โดย (A3) จะพบว่า

$$x+(z+(-z)) = y+(z+(-z))$$

เนื่องจาก $z+(-z)=0$ จึงได้ว่า

$$x+0 = y+0$$

และเนื่องจาก 0 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวก ดังนั้น โดย (A4) จึงสรุปได้ว่า

$$x = y$$

(b) เนื่องจาก $0 \in \mathbb{R}$ จึงได้ว่า $0+0=0$ [A4]
ดังนั้น $x \cdot (0+0) = x \cdot 0$ [M1]

$$\Rightarrow \quad x\cdot 0 + x\cdot 0 = x\cdot 0 \qquad [DL]$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot 0 + x\cdot 0 = x\cdot 0 + 0 \qquad [A4]$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot 0 + x\cdot 0 = 0 + x\cdot 0 \qquad [A2]$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot 0 = 0 \qquad [(a)]$$

(c) เนื่องจาก 0 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวก จึงได้ว่า

$$0 + 0 = 0$$

ในอีกด้านหนึ่ง $0 \in \mathbb{R}$ จึงได้ว่า มีจำนวนจริง (-0) ที่ทำให้

$$0 + (-0) = 0$$

พิจารณา

$$0 + (-0) = 0 = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \quad (-0) + 0 = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \quad -0 = 0$$

(d)
$$
\begin{aligned}
x + (-1)\cdot x &= 1\cdot x + (-1)\cdot x && [M4] \\
&= x\cdot 1 + x\cdot(-1) && [M2] \\
&= x\cdot(1 + (-1)) && [DL] \\
&= x\cdot 0 && [A5] \\
&= 0 && [(b.)]
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก inverse ภายใต้การบวกของ $x \in \mathbb{R}$ มีเพียงตัวเดียว

คือ $-x \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$x + (-x) = 0$$

แต่เราทราบว่า $x + (-1)\cdot x = 0$

ดังนั้น $x + (-1)\cdot x = x + (-x)$

จะได้ว่า $(-1)\cdot x + x = (-x) + x$

เพราะฉะนั้น $(-1)\cdot x = -x$

(e) [$xy = 0$ iff $x = 0$ or $y = 0$]

($\Leftarrow$) สมมติให้ $x = 0$ หรือ $y = 0$

พิจารณา ถ้า $x = 0$ จะได้ว่า

$$xy = 0y = y\cdot 0 = 0$$

และถ้า $y = 0$ จะได้ว่า

$$xy = x\cdot 0 = 0$$

($\Rightarrow$) สมมติให้ $xy = 0$ และ $x \neq 0$

จะแสดงว่า $y = 0$

เนื่องจาก $x \neq 0$ ดังนั้น $\exists!\,(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R} \ni x\cdot(\frac{1}{x}) = 1$

พิจารณา

$$\begin{aligned} y = y\cdot 1 = y\cdot\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) &= (yx)\cdot\frac{1}{x} \\ &= (xy)\cdot\frac{1}{x} \\ &= 0\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$