ทฤษฎีบท: ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ ที่สอดคล้อง $x \leq y+\varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้ว $x \leq y$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \leq y+\varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$
และ $x > y$
จะได้ว่า $x - y > 0$ กำหนดให้ $\varepsilon := \dfrac{x-y}{2} > 0$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
x \leq y + \varepsilon &= y + \left(\frac{x-y}{2}\right) \\
&= \frac{2y + x - y}{2} \\
&= \frac{y+x}{2} < \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = x
\end{aligned}
$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง $[x < x]$ เพราะฉะนั้น $x > y$ จึงไม่ถูกต้อง ดังนั้น $x \leq y$.

$\square$

ในส่วนต่อไป เราจะศึกษาสมบัติของค่าสัมบูรณ์ (absolute value)

นิยาม: ถ้า $x \in \mathbb{R}$ ค่าสัมบูรณ์ของ x จะเขียนแทนด้วย $|x|$ และนิยามโดย

$$
|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}
$$

ทฤษฎีบท: ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $a \geq 0$ จะได้ว่า

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

(iii) $|xy| = |x||y|$

(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$

พิสูจน์ (i) เราจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีด้วยกัน

กรณีที่ 1: สมมติให้ $x \geq 0$ จะได้ว่า $|x| = x \geq 0$

กรณีที่ 2: สมมติให้ $x < 0$ จะได้ว่า $|x| = -x$

เนื่องจาก $x < 0$ ทำให้ได้ว่า $-x > 0$

จึงสรุปได้ว่า $|x| = -x > 0$

เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า $|x| \geq 0$

(ii) ($\Rightarrow$) สมมติว่า $|x| \leq a$

จะต้องแสดงว่า $-a \leq x \leq a$

[$-a \leq x$ และ $x \leq a$]

เนื่องจาก $a \geq 0$ จะได้ว่า

$x = |x| \leq a$, และ $-x = |x| \leq a$

ดังนั้น $-a \leq -(-x) = x$ ✓

จึงสรุปได้ว่า $-a \leq x \leq a$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $-a \leq x \leq a$

จะแสดงว่า $|x| \leq a$

พิจารณา ถ้า $x \geq 0$ จะได้ว่า $|x| = x \leq a$

ถ้า $x < 0$ จะได้ว่า $|x| = -x$ ✓

และเนื่องจาก $-a \leq x$ จะได้ว่า $-(-a) \geq -x$

$\Rightarrow a \geq -x$ ✓

นั่นคือ $|x| = -x \leq a$

ดังนั้น $|x| \leq a$

(iii) จะแสดงว่า $|xy| = |x| \cdot |y|$

เราจะพิจารณาเป็น 5 กรณี

กรณีที่ 1: ถ้า $x = 0$ หรือ $y = 0$

จะได้ว่า $|xy| = |0| = 0$

และ $|x||y| = |x| \cdot |0| = |x| \cdot 0 = 0$

กรณีที่ 2: ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$

จะได้ว่า $xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy$

และ $|x| = x$ และ $|y| = y$

ดังนั้น $|xy| = xy = |x||y|$

กรณีที่ 3: ถ้า $x > 0$ และ $y < 0$

จะได้ว่า $xy < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy)$

เนื่องจาก $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

และ $y < 0 \Rightarrow |y| = -y$

ดังนั้น $|x||y| = x(-y) = -(xy)$

เพราะฉะนั้น $|xy| = |x||y|$

กรณีที่ 4: ถ้า $x < 0$ และ $y > 0$

จะได้ว่า $xy < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy)$

เนื่องจาก $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

และจาก $y > 0 \Rightarrow |y| = y$

ดังนั้น $|x||y| = (-x)y = -(xy)$

เพราะฉะนั้น $|xy| = |x||y|$

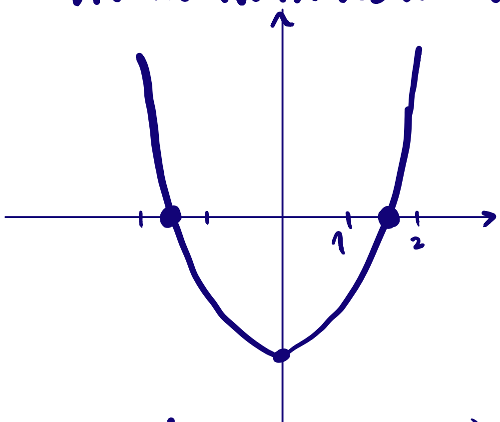
กรณีที่ 5: ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$

จะได้ว่า $xy > 0 \Rightarrow |xy| = xy$

เนื่องจาก $x<0 \Rightarrow |x| = -x$
และ จาก $y<0 \Rightarrow |y| = -y$
ดังนั้น $|x||y| = (-x)(-y) = xy$
เพราะฉะนั้น $|xy| = |x||y|$ $\square$

3.3 สัจพจน์ความบริบูรณ์ (the Completeness Axiom)

พิจารณา กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2$



สังเกตว่า! • จะต้องยกกำลังสอง แล้วเท่ากับ 2

ทฤษฎีบท: $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ สมมติให้แย้งว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ทำให้

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad — \quad (1)$$

สมมติให้ m และ n ไม่เป็นจำนวนคู่พร้อมกัน

[$\exists a,b \in \mathbb{Z}$ s.t. $m = 2a$ และ $n = 2b \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$]

นำสมการ (1) มายกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad m^2 = 2n^2 \quad \text{—} (2)$$

$\Rightarrow$ m^2 เป็นจำนวนคู่

$\Rightarrow$ m เป็นจำนวนคู่ [Why?]

เนื่องจาก m และ n ไม่เป็นจำนวนคู่พร้อมกัน จะได้ว่า

n เป็นจำนวนคี่ ✓✓✓

ในอีกด้านหนึ่ง เนื่องจาก m เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะมี $k \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

$$m = 2k$$

$$\Rightarrow \quad m^2 = 4k^2 \quad \text{—} (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

$$2n^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow \quad n^2 = 2k^2$$

$\Rightarrow$ n^2 เป็นจำนวนคู่

$\Rightarrow$ n เป็นจำนวนคู่ ✓✓✓

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ n เป็นจำนวนคี่

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

$\square$