1.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติรูปแบบแน่นอน

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบต่อไปนี้

① $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

② $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ หรือ $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

③ $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$

หรือ $\int \cos mx \cos nx \, dx$

$\boxed{1}$ การหาปริพันธ์ในรูป $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

เราจะแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

① m หรือ n เป็นจำนวนคี่

② m และ n เป็นจำนวนคู่

โดยมีหลักการดังนี้

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$	วิธีการ (Method)

① m เป็นจำนวนคี่	1. แยก $\sin x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ กับพจน์ $\sin^{m-1}x$ ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \cos x$
② n เป็นจำนวนคี่	1. แยก $\cos x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ กับพจน์ $\cos^{n-1}x$ ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \sin x$
③ m และ n เป็นจำนวนคู่	ทำการลดทอนเลขชี้กำลังโดยใช้สูตร $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ และ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$

วิธีทำ [สังเกต! $m=4, n=5 \Rightarrow$ ②]

พิจารณา $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x \, dx$

$$= \int \sin^4 x \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x \, dx \checkmark$$

กำหนดให้ $\boxed{u = \sin x} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \cos x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x \, dx$

$$= \int u^4 (1-u^2)^2 \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

(ห - ค)² = ห² - 2หค + ค²

$$= \int u^4 (1-u^2)^2 \, du$$

$$= \int u^4 (1 - 2u^2 + u^4) \, du$$

$$= \int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \sin^7 2x \cos^{-3} 2x \, dx$

วิธีทำ [สังเกต! $m = 7, n = -3$]

พิจารณา $\int \sin^7 2x \cos^{-3} 2x \, dx$

$$= \int \sin^6 2x \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx$$

$$= \int (\sin^2 2x)^3 \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 2x)^3 \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx$$

กำหนดให้ $\boxed{u = \cos 2x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-2\sin 2x}$$

ดังนั้น $\int \sin^7 2x \cos^{-3} 2x \, dx$

$$= \int (1-\cos^2 2x)^3 \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx$$

$$= \int (1-u^2)^3 u^{-3} \cancel{\sin 2x} \frac{du}{(-2)\cancel{\sin 2x}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-u^2)^3 u^{-3} \, du$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-3u^2+3u^4-u^6) u^{-3} \, du$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \int (u^{-3} - 3u^{-1} + 3u - u^3) \, du$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{u^{-2}}{-2} - 3\ln|u| + 3\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}\right] + C$$

$$= \frac{u^{-2}}{4} + \frac{3}{2}\ln|u| - \frac{3}{4}u^2 + \frac{u^4}{8} + C$$

$$= \frac{\cos^{-2} 2x}{4} + \frac{3}{2}\ln|\cos 2x| - \frac{3}{4}\cos^2 2x + \frac{\cos^4 2x}{8} + C$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\int \sin^5 \frac{x}{2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> [สังเกต! $m=5, n=0 \Rightarrow$ 1]

พิจารณา $\int \sin^5 \frac{x}{2}\,dx = \int \sin^4 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}\,dx$

$$= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \int \left(1-\cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2}\,dx$$

กำหนดให้ $u = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow dx = \frac{(-2)\,du}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ดังนั้น $\int \sin^5 \frac{x}{2}\,dx = \int \left(1-\cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$$= \int (1-u^2)^2 \cancel{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(-2)\,du}{\cancel{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= (-2)\int (1-u^2)^2\,du$$

$$= (-2)\int (1-2u^2+u^4)\,du$$

$$= (-2)\left[u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right] + C$$

$$= -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{3}\cos^3\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> : จงหาค่าของ $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\Big[1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x$$

$$- \cos^3 2x\Big]\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\Big[\underset{\checkmark}{1} + \underset{?①}{\cos 2x} - \underset{?②}{\cos^2 2x} - \underset{?③}{\cos^3 2x}\Big]dx$$

①; $\int \cos 2x\,dx$; $u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\Rightarrow \int \cos 2x\,dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sin u + C_1 = \frac{\sin 2x}{2} + C_1$$

②; $\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C_2$$

③; $\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx$

$$= \int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$[u = \sin 2x] \Rightarrow$ $= \int (1 - u^2)\cancel{\cos 2x}\,\frac{du}{2\cancel{\cos 2x}}$

$$= \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,du$$

$$= \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + C_3$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_3$$

ดังนั้น

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{8}\int [1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x]\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx - \int \cos^2 2x\,dx - \int \cos^3 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \cancel{\frac{\sin 2x}{2}} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \cancel{\frac{\sin 2x}{2}} + \frac{\sin^3 2x}{6}\right] + C$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin^3 2x}{6}\right] + C$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C \qquad \square$$

ตัวอย่าง : จงหาค่าของ $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$

วิธีทำ $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^4\,dx$

$$= \frac{1}{16}\int (2\sin x\cos x)^4\,dx$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$= \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (\sin^2 2x)^2\,dx$$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 2(2x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int (1-\cos 4x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{64}\int (1-\underbrace{2\cos 4x}_{①}+\underbrace{\cos^2 4x}_{②})\,dx$$

①; $\int \cos 4x\,dx \Rightarrow u = 4x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$

$\Rightarrow \int \cos 4x\,dx = \int \cos u\,\frac{du}{4} = \frac{\sin u}{4} + C_1 = \frac{\sin 4x}{4} + C_1$

②; $\int \cos^2 4x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2(4x)}{2}\right) dx$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\int (1+\cos 8x)\,dx$$

(why?)

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{16} + C_2$$

ดังนั้น $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{64}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)\,dx$

$$= \frac{1}{64}\left[x - \frac{2\sin 4x}{4} + \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{16}\right] + C$$

$$= \frac{1}{64}\left[\frac{3x}{2} - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{16}\right] + C$$

$$= \frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C$$

$\square$

ตัวอย่าง : จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{\sin^6 3x}{\cos^2 3x}\,dx$

วิธีทำ. พิจารณา

$$\frac{\sin^6 3x}{\cos^2 3x} = \frac{(\sin^2 3x)^3}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 3x)^3}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{1 - 3\cos^2 3x + 3\cos^4 3x - \cos^6 3x}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 3x} - 3 + 3\cos^2 3x - \cos^4 3x$$

$$= \sec^2 3x - 3 + \frac{3}{2}(1 + \cos 2(3x))$$

$$- (\cos^2 3x)^2$$

$$= \sec^2 3x - 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 6x - \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2$$

$$= \sec^2 3x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 6x - \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x\right)$$

$$= \sec^2 3x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 6x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 6x - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 12x}{2}\right)$$

$$= \sec^2 3x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 6x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 6x - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 12x$$

$= \ldots$

$\boxed{2}$ การหาปริพันธ์ในรูป $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ หรือ $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ในกรณีต่อไปนี้

① n เป็นจำนวนคู่

② m เป็นจำนวนคี่

③ m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่ [Integration by Part]

④ $n = 0$

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx / \int \cot^m x \csc^n x \, dx$	วิธีการ (Method)
① n เป็นจำนวนคู่	1. แยก $\sec^2 x$ / $\csc^2 x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ / $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ กับพจน์ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \tan x$ / $u = \cot x$

② m เป็นจำนวนคี่	1. แยก $\sec x \tan x$ / $\csc x \cot x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ / $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ กับพจน์ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \sec x$ / $u = \csc x$