$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ / $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$	วิธีการ (Method)
① n เป็นจำนวนคู่	1. แยก $\sec^2 x$ / $\csc^2 x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ / $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ กับพจน์ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \tan x$ / $u = \cot x$
② m เป็นจำนวนคี่	1. แยก $\sec x \tan x$ / $\csc x \cot x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ / $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ กับพจน์ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \sec x$ / $u = \csc x$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \tan^{-2} 2x \sec^4 2x\,dx$

วิธีทำ [สังเกต! $m = -2, n = 4 \Rightarrow$ ①]

พิจารณา $\int \tan^{-2} 2x \sec^4 2x\,dx = \int \tan^{-2} 2x \sec^2 2x \sec^2 2x\,dx$

$$= \int \tan^{-2} 2x (\tan^2 2x + 1) \sec^2 2x\,dx$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

กำหนดให้ $u = \tan 2x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\sec^2 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2\sec^2 2x}$$

ดังนั้น

$$\int \tan^{-2} 2x \sec^4 2x\,dx = \int \tan^{-2} 2x\,(\tan^2 2x + 1)\sec^2 2x\,dx$$

$$= \int u^{-2}(u^2+1)\cancel{\sec^2 2x}\,\frac{du}{\cancel{2\sec^2 2x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-2}(u^2+1)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+u^{-2})\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u + \frac{u^{-1}}{-1}\right] + C$$

$$= \frac{\tan 2x}{2} - \frac{1}{2\tan 2x} + C \qquad \square$$

<u>ตัวอย่าง2</u>: จงหาค่าของ $\int \csc^8 5x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> [เลือกกรณี! $m = 0, n = 8 \Rightarrow$ 1]

พิจารณา $\int \csc^8 5x\,dx = \int \csc^6 5x \csc^2 5x\,dx$

$$= \int (\csc^2 5x)^3 \csc^2 5x\,dx$$

$$\frac{c^2}{s^2} + \frac{s^2}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$= \int (\cot^2 5x + 1)^3 \csc^2 5x \, dx$$

กำหนดให้ $u = \cot 5x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -5\csc^2 5x \Rightarrow dx = \frac{du}{(-5)\csc^2 5x}$$

ดังนั้น $\int \csc^8 5x \, dx = \int (\cot^2 5x + 1)^3 \csc^2 5x \, dx$

$$= \int (u^2+1)^3 \cancel{\csc^2 5x} \frac{du}{(5)\cancel{\csc^2 5x}}$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right) \int (u^2+1)^3 \, du$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right) \int (u^6 + 3u^4 + 3u^2 + 1) \, du$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right) \left[\frac{u^7}{7} + \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^3}{3} + u \right] + C$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right) \left[\frac{\cot^7 5x}{7} + \frac{3\cot^5 5x}{5} + \cot^3 5x + \cot 5x \right] + C$$

$$= -\frac{\cot^7 5x}{35} - \frac{3\cot^5 5x}{25} - \frac{\cot^3 5x}{5} - \frac{\cot 5x}{5} + C$$

D

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\int \sqrt{\sec x}\tan^3 x\,dx$

<u>วิธีทำ</u>. [สังเกต! $m = 3,\ n = \frac{1}{2} \rightarrow ②$]

พิจารณา $\int \sqrt{\sec x}\tan^3 x\,dx = \int \tan^3 x\sqrt{\sec x}\,dx$

$$= \int \tan^3 x \sec^{\frac{1}{2}} x\,dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \sec x \tan x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{1}{2}} x \sec x \tan x\,dx$$

กำหนดให้ $u = \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$$

นั่นคือ $\int \sqrt{\sec x}\tan^3 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{1}{2}} x \sec x \tan x\,dx$

$$= \int (u^2 - 1)u^{-\frac{1}{2}} \cancel{\sec x \tan x}\,\frac{du}{\cancel{\sec x \tan x}}$$

$$= \int (u^2 - 1)u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u^{3/2} - u^{-\frac{1}{2}})\,du$$

$$= \frac{2u^{5/2}}{5} - 2u^{1/2} + C$$

$$= \frac{2\sec^{5/2}x}{5} - 2\sec^{1/2}x + C \quad \square$$

ฝาก! $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\csc^3 x}\,dx = -\frac{\cot^4 x}{4} - \frac{\cot^2 x}{2} + C$

$\displaystyle\int \cot x \csc^4 x\,dx$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \tan^3 4x\,dx$

วิธีทำ [นึกสูตร! $\tan^2\square = \sec^2\square - 1$]

พิจารณา $\displaystyle\int \tan^3 4x\,dx = \int \tan 4x \tan^2 4x\,dx$

$$= \int \tan 4x\left(\sec^2 4x - 1\right)dx$$

$$= \underbrace{\int \tan 4x \sec^2 4x\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \tan 4x\,dx}_{I_2}$$

I_1; $\displaystyle\int \tan 4x \sec^2 4x\,dx$; $u = \tan 4x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 4\sec^2 4x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{4\sec^2 4x}$$

$$\Rightarrow \int \tan 4x \sec^2 4x \, dx = \int u \cancel{\sec^2 4x} \frac{du}{4\cancel{\sec^2 4x}}$$

$$= \frac{1}{4}\int u \, du = \frac{u^2}{8} + C_1$$

$$= \frac{\tan^2 4x}{8} + C_1$$

I_2 : $\int \tan 4x \, dx = \frac{1}{4} \ln|\sec 4x| + C_2$ (why?)

ดังนั้น $\int \tan^3 4x = \frac{\tan^2 4x}{8} - \frac{1}{4}\ln|\sec 4x| + C$ $\square$

<u>ฝาก!</u> ลองหาค่าของ $\int \tan^{-4} x \, dx$

<u>วิธีทำ</u>. $\int \tan^{-4} x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cot x}\right)^{-4} dx$

$$= \int ((\cot x)^{-1})^{-4} dx$$

$$= \int \cot^4 x \, dx$$

$$= \dots$$

③ การหาปริพันธ์ในรูป $\int \sin mx \cos nx \, dx$,

$\int \sin mx \sin nx \, dx$ และ $\int \cos mx \cos nx \, dx$

ในการหาปริพันธ์ในรูปต่อไปนี้ เราต้องอาศัยเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติดังนี้

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$$
$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$
$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\int \cos 3x\sin 5x\,dx$

<u>วิธีทำ</u>
$$\int \cos 3x\sin 5x\,dx = \int \sin 5x\cos 3x\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}[\sin(5x-3x)+\sin(5x+3x)]\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int[\sin 2x+\sin 8x]\,dx$$
(why?)
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 8x}{8}\right]+C$$
$$= -\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+C \quad \square$$

<u>ตัวอย่าง</u>: $\int \sin 7x\sin 10x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> $\int \sin 7x\sin 10x\,dx = \int \frac{1}{2}[\cos(7x-10x)-\cos(7x+10x)]\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(-3x) - \cos(17x)]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos 3x - \cos 17x]\,dx$$

$$= \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 17x}{34} + C$$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\int \sin x \cos 2x \sin 4x \, dx$

<u>วิธีทำ</u>. พิจารณา

$$\sin x \cos 2x \sin 4x = [\sin x \cos 2x]\sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(x-2x) + \sin(x+2x)] \cdot \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(-x) + \sin 3x] \cdot \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}\sin(-x)\sin 4x$$

$$+ \frac{1}{2}\sin 3x \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[\cos(-x-4x) - \cos(-x+4x)]$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[\cos(3x-4x) - \cos(3x+4x)]$$

$$= \frac{1}{4}[\cos(-5x) - \cos(3x)]$$

$$+ \frac{1}{4}[\cos(-x) - \cos(7x)]$$

$$= \ldots$$

Win! $\int (\cos^2 3x - \sin 4x)^2 \, dx$