1.4 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$\sqrt{a^2-x^2}\ ,\quad a^2-x^2$$

$$\sqrt{a^2+x^2}\ ,\quad a^2+x^2$$

$$\sqrt{x^2-a^2}\ ,\quad x^2-a^2$$

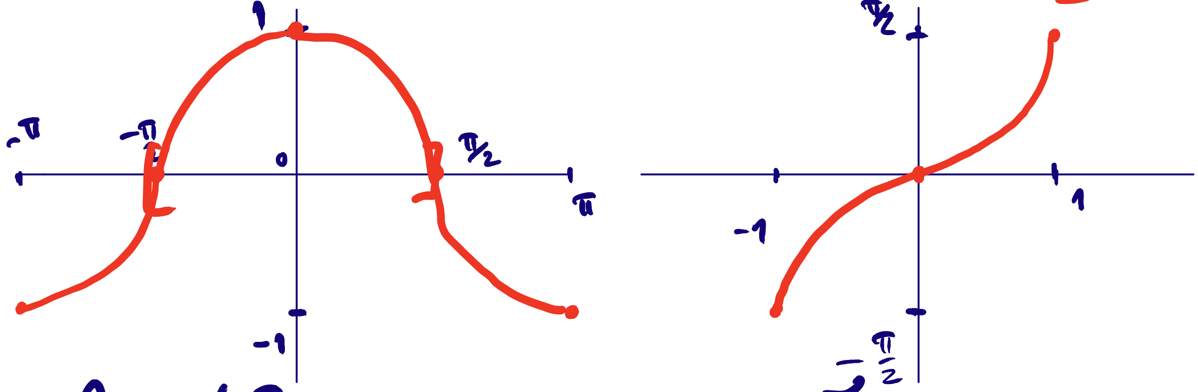
โดยที่ a เป็นค่าคงตัวที่มีค่าเป็นบวก

พิจารณาตัวอย่าง ฟังก์ชัน $\sqrt{a^2-x^2}$ จะพบว่า เหมาะที่จะแทนค่า $x = a\sin\theta$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} \\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta} = |a\cos\theta| = a|\cos\theta|
\end{aligned}$$

สังเกตว่าฟังก์ชันที่แทนค่ามาแล้วนี้ ยังคงเกี่ยวข้องกับค่าสัมบูรณ์ และในขั้นตอนสุดท้าย เราต้องคำนึงว่า จะต้องทำการแทนค่า x โดย $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

ดังนั้น เราจำเป็นต้องพิจารณาขอบเขตของมุม θ เพิ่มเติมดังนี้
เนื่องจากฟังก์ชัน $\cos\theta \geq 0$ เมื่อ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



ในกรณีนี้จึงกำหนดขอบเขตของ θ เป็น $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos\theta| = a\cos\theta$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$

กำหนดให้ $x = 3\sin\theta$ โดยที่ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

จะได้ว่า $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$

$$= \sqrt{3^2-(3\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{3^2(1-\sin^2\theta)} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

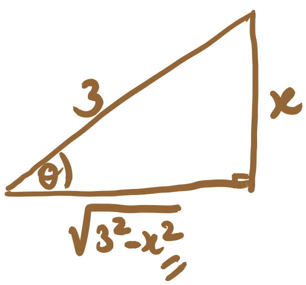
และ: $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}[3\sin\theta] = 3\cos\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$

ดังนั้น $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{3\sin\theta(\cancel{3\cos\theta})d\theta}{\cancel{3\cos\theta}}$

$= 3\int \sin\theta\, d\theta$

$= -3\cos\theta + C$

พิจารณา จาก $x = 3\sin\theta$ เพราะฉะนั้นต้องพิจารณาสามเหลี่ยม อ้างอิง จะได้ ซึ่ง $\sin\theta = \frac{x}{3}$



ดังนั้น $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -3\cos\theta + C$

$= -3\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C$

$= -\sqrt{9-x^2} + C$

$\square$

ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาปริพันธ์ในรูปแบบอื่น ดังนี้

ฟังก์ชัน (x)	การแทนค่า (θ)	ขอบเขตของ θ
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$; $x>a$ $\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$; $x<-a$

และสามารถสรุปขั้นตอนการหาปริพันธ์ได้ดังนี้

1. จัดรูปฟังก์ชัน (x) ให้ตรงตามรูปแบบในตาราง

2. กำหนดให้ $x = a\boxed{}\theta$ และขอบเขตของ θ ตามตาราง

3. แทนค่า (x) ให้อยู่ในรูป (θ) และหา dx

4. อินทิเกรตเทียบ θ และแทนค่า (x) คืน ด้วยรูปสามเหลี่ยมอ้างอิง

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{4+x^2} = \sqrt{2^2+x^2}$

ดังนั้น กำหนดให้ $x = 2\tan\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

จะได้ว่า $\sqrt{4+x^2} = \sqrt{2^2+x^2}$

$$= \sqrt{2^2+(2\tan\theta)^2} = \sqrt{2^2(1+\tan^2\theta)}$$

$$= 2\sqrt{\sec^2\theta}$$

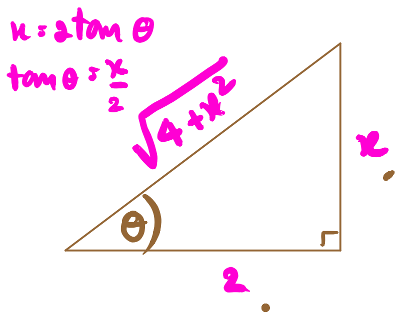
$$= 2\sec\theta$$

และ: $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d[2\tan\theta]}{d\theta} = 2\sec^2\theta$

$$\Rightarrow dx = 2\sec^2\theta \, d\theta$$

ดังนั้น

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sec\theta}}\,\cancel{2}\sec^{\cancel{2}}\theta\,d\theta$$



$$= \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

$\square$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $x > \frac{2}{5}$ จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)}$

$$= 5\sqrt{x^2 - \frac{4}{25}}$$

$$= 5\sqrt{x^2-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2}$$

กำหนดให้ $x = \frac{2}{5}\sec\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

จะได้ว่า $\sqrt{25x^2-4} = 5\sqrt{x^2-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2}$

$$= 5\sqrt{\left(\tfrac{2}{5}\sec\theta\right)^2-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2}$$

$$= 5\left(\tfrac{2}{5}\right)\sqrt{\sec^2\theta-1}$$

$$= 2\sqrt{\tan^2\theta} = 2\tan\theta$$

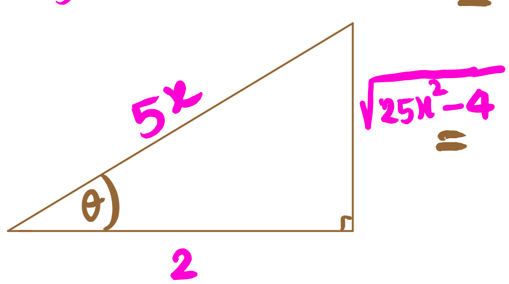
และ $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\left[\tfrac{2}{5}\sec\theta\right] = \tfrac{2}{5}\sec\theta\tan\theta$

$$\Rightarrow dx = \tfrac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\tan\theta}}\left(\tfrac{\cancel{2}}{5}\sec\theta\cancel{\tan\theta}\right)d\theta$

$x = \frac{2}{5}\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{5x}{2}$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta$$



$$= \frac{1}{5}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2} \right| + C$$

$\square$