ตัวอย่าง : จงหาค่าของ $\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$x^2-4x+8 = x^2-2x(2)+2^2-2^2+8$$

$$= (x-2)^2+4 = \underbrace{(x-2)}_{x}{}^2+\underbrace{2}_{a}{}^2$$

x^2+a^2

กำหนดให้ $x-2 = 2\tan\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$[\Rightarrow x = 2\tan\theta+2]$

จะได้ว่า $x^2-4x+8 = (x-2)^2+2^2$

$$=(2\tan\theta)^2+2^2$$

$$=2^2(\tan^2\theta+1)$$

$$=2^2\sec^2\theta$$

และ $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d[2\tan\theta+2]}{d\theta} = 2\sec^2\theta$

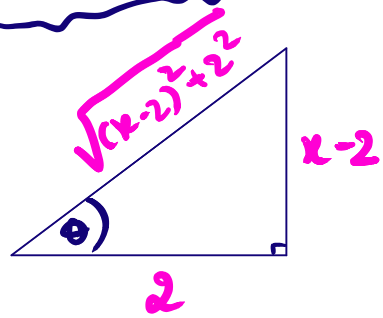
$\Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$

ดังนั้น

$$\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{2\tan\theta+2}{2^2\sec^2\theta}(2\sec^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{\cancel{2}(\tan\theta+1)\,\cancel{2}\cancel{\sec^2\theta}}{4\cancel{\sec^2\theta}}\,d\theta$$

$\boxed{x-2 = 2\tan\theta}$



$$= \frac{4}{4}\int (\tan\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \int (\tan\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta| + \theta + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{(x-2)^2+2^2}}{2}\right| + \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C \qquad \square$$

ฝาก! $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx$

ข้อสอบ : จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\,d\theta$

วิธีทำ [สังเกต! ต้องทำการแทนค่าก่อน]

กำหนดให้ $u = \sin\theta$

$\Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = \cos\theta \Rightarrow d\theta = \dfrac{du}{\cos\theta}$

ดังนั้น

$$\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{2-u^2}}\,\frac{du}{\cos\theta} = \int \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\,du$$

พิจารณา $\sqrt{2-u^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2-u^2}$

กำหนดให้ $u = \sqrt{2}\sin\eta$ โดยที่ $\eta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

พิจารณา $\sqrt{2-u^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}\sin\eta)^2}$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1-\sin^2\eta}$$

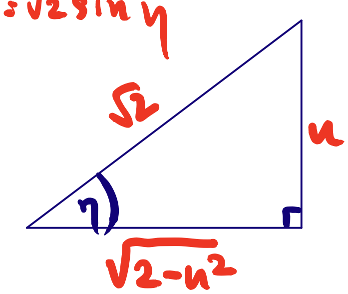
$$= \sqrt{2}\sqrt{\cos^2\eta} = \sqrt{2}\cos\eta$$

พิจารณา $\frac{du}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}[\sqrt{2}\sin\eta] = \sqrt{2}\cos\eta$

$$\Rightarrow du = \sqrt{2}\cos\eta\, d\eta$$

ดังนั้น $\int \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\,du = \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}\cos\eta}}(\cancel{\sqrt{2}\cos\eta})\,d\eta$

$u = \sqrt{2}\sin\eta$



$$= \int 1\, d\eta = \eta + C$$

$$= \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$u = \sqrt{2}\sin\eta$
$\Downarrow$
$\sin\eta = \frac{u}{\sqrt{2}}$
$\Downarrow$
$\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) = \eta$

$$= \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right) + C \quad \square$$

ข้อต่อไป: $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}\,dx$ [ยาก!]

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$4x^2+4x+5 = 4\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)$$

$$= 4\left(x^2+2x\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right)$$

$$= 4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right]$$

นั่นคือ $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right]}\,dx$

กำหนดให้ $x+\frac{1}{2} = 1\tan\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ดังนั้น $\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right] = \tan^2\theta+1 = \boxed{\sec^2\theta}$

จาก $x+\frac{1}{2} = \tan\theta \Rightarrow x = \tan\theta - \frac{1}{2}$

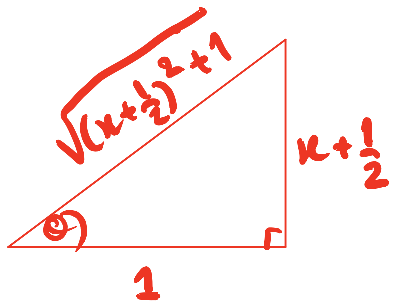
$$\Rightarrow 2x+3 = 2\left(\tan\theta-\frac{1}{2}\right)+3 = \boxed{2\tan\theta+2}$$

และ $\displaystyle\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\left[\tan\theta-\frac{1}{2}\right]}{d\theta} = \sec^2\theta$

$$\Rightarrow dx = \boxed{\sec^2\theta\,d\theta}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx$

$x + \frac{1}{2} = \tan\theta$



$$= \frac{1}{4}\int \frac{(2\tan\theta+2)(\cancel{\sec^2\theta})\,d\theta}{\cancel{\sec^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\tan\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|\sec\theta| + \theta\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+1}}{1}\right| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{2}\right| + \frac{1}{2}\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

$\square$

1.6 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเศษส่วนย่อย

พิจารณา $\dfrac{5x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$

$$= \frac{2x-6}{(x+1)(x-3)} + \frac{3x+3}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{2}{(x+1)} + \frac{3}{(x-3)}$$

เศษส่วนย่อย

ดังนั้น ได้

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx$$

$$= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

ซึ่งเทคนิคการแยกพจน์ข้างต้นนี้เรียกว่า "การแยกเศษส่วนย่อย" (Partial Fraction) ซึ่งในขั้นตอนแรกของกระบวนการข้างต้น คือการหาค่าคงตัว (ตัวเลข) A และ B ที่ทำให้

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

สำหรับการหาค่า A และ B นั้น ทำได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A(x-3)}{(x+1)(x-3)} + \frac{B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{x(A+B) + (-3A+B)}{x^2-2x-3}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 5 &= A+B \\ -3 &= -3A+B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B &= 5-A \\ -3 &= -3A+5-A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B &= 5-A \\ -8 &= -4A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$\Downarrow$

$B = 5 - 2$

$\Rightarrow \boxed{B = 3}$

$\Rightarrow$ $A = 2$ และ $B = 3$

ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันตรรกยะ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ใดๆ เราสามารถทำการแยกเศษส่วนย่อย โดยกระบวนการดังนี้

พิจารณา ฟังก์ชันตรรกยะ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ พหุนาม

① Check! เศษส่วนแท้:

ตรวจสอบว่า $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$

ถ้า " $<$ " แล้วไป ②

ถ้า " $\geq$ " แล้วนำ $Q(x)$ ไปหาร $P(x)$ ให้เรียบร้อย

② ทำการแยกตัวประกอบของ $Q(x)$ จนกว่าจะแยกไม่ได้

$[(x-a), (x-a)^m, ax^2+bx+c, (ax^2+bx+c)^m]$

③ ทำการกำหนดเศษส่วนย่อย โดยการพิจารณาดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u>: ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ มีพจน์

$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)$

เมื่อ $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \cdots \neq a_n$

ให้กำหนดเศษส่วนย่อย

$$\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a_n)}$$

กรณีที่ 2: ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ มีพจน์ $(x-a)^n$
ให้กำหนดเศษส่วนย่อย

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

กรณีที่ 3: ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ มีพจน์ $(ax^2+bx+c)^m$

ให้กำหนดเศษส่วนย่อย

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

4. ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของเศษส่วนย่อยที่กำหนดทั้งหมดกับ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เพื่อหาสัมประสิทธิ์ที่เกี่ยวข้องทั้งหมด

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\deg(5x-10)=1 < 2=\deg(x^2-3x-4)$

ซึ่งเป็นเศษส่วนแท้

พิจารณา $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$

กำหนดเศษส่วนย่อยดังนี้

$$\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{A_1}{(x-4)} + \frac{A_2}{(x+1)}$$

$$= \frac{A_1(x+1) + A_2(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{A_1x + A_1 + A_2x - 4A_2}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x + (A_1-4A_2)}{(x-4)(x+1)}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\left.\begin{aligned} A_1+A_2 &= 5 \\ A_1-4A_2 &= -10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= 5-A_2 \\ 5-A_2-4A_2 &= -10 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= 5-A_2 \\ -5A_2 &= -15 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_2=3} \Rightarrow \boxed{A_1=2}$$

นั่นคือ

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1}$$

ดังนั้น

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4}\,dx = \int \frac{2}{x-4}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x-4| + 3\ln|x+1| + C$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $\deg(2x+4) = 1 < 3 = \deg(x^3-2x^2)$
ซึ่งเป็นเศษส่วนแท้

พิจารณา $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$

และกำหนดเศษส่วนย่อย ดังนี้

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2}$$

$$= \frac{A_1x^2 + A_2x(x-2) + A_3(x-2)}{x^2(x-2)}$$

$$= \frac{A_1x^2 + A_2x^2 - 2A_2x + A_3x - 2A_3}{x^2(x-2)}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x^2 + (-2A_2+A_3)x - 2A_3}{x^2(x-2)}$$

ซึ่งทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ -2A_2 + A_3 &= 2 \\ -2A_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ -2A_2 - 2 &= 2 \\ \boxed{A_3 = -2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ \boxed{A_2 = -2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A_1 = 2}$$

ดังนั้น $\frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{2}{(x-2)} - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$

นั่นคือ

$$\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2}{x^2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-2| - 2\ln|x| - 2\left(-\frac{1}{x}\right) + C$$

$$= 2\ln|x-2| - 2\ln|x| + \frac{2}{x} + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{2}{x} + C$$

$\square$

ตัวอย่าง : จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} dx$

วิธีทำ

พิจารณา $\deg(1) = 0 < 6 = \deg(x^2(x^2+1)^2)$

ซึ่งเป็นเศษส่วนแท้

กำหนดเศษส่วนย่อยดังนี้

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3x+B}{x^2+1} + \frac{A_4x+C}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{A_1x(x^2+1)^2 + A_2(x^2+1)^2 + (A_3x+B)x^2(x^2+1) + (A_4x+C)x^2}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l} A_1x(x^4+2x^2+1) + A_2(x^4+2x^2+1) + (A_3x+B)(x^4+x^2) \\ + A_4x^3 + Cx^2 \end{array}\right]}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l} A_1x^5 + 2A_1x^3 + A_1x + A_2x^4 + 2A_2x^2 + A_2 \\ A_3x^5 + A_3x^3 + Bx^4 + Bx^2 + A_4x^3 + Cx^2 \end{array}\right]}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{\left[(A_1+A_3)x^5+(A_2+B)x^4+(2A_1+A_3+A_4)x^3 + (2A_2+B+C)x^2+A_1x+A_2\right]}{x^2(x^2+1)^2}$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\left.\begin{aligned} A_1+A_3 &= 0 \\ A_2+B &= 0 \\ 2A_1+A_3+A_4 &= 0 \\ 2A_2+B+C &= 0 \\ \boxed{A_1 = 0} \\ \boxed{A_2 = 1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\boxed{A_3 = 0} \\ &\boxed{B = -1} \\ &\boxed{A_4 = 0} \\ &2-1+C = 0 \end{aligned}\right| \boxed{C = -1}$$

นั่นคือ $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0\cdot x-1}{x^2+1} + \frac{0\cdot x-1}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

ฝาก! อินทิเกรตต่อ!

① $\int \frac{2x^3-4x^2-x-1}{x^2-2x-3}\,dx$

② $\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}\,d\theta$