บทที่ 1

เทคนิคการหาปริพันธ์

ทบทวน! สูตรการหาอนุพันธ์และปริพันธ์

Diff.	Integrate.
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int 1\,dx = x + C$
$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$ $(r \neq -1)$	$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ $(r \neq -1)$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$

$$\frac{d[a^x]}{dx} = a^x \ln a \quad (a>0, a\neq 1) \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0, a\neq 1)$$

$$\frac{d[\ln x]}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\frac{d[\arcsin x]}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\frac{d[\arctan x]}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\frac{d[\operatorname{arcsec} x]}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a}}\,dx = \operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

สมบัติพื้นฐานของปฏิยานุพันธ์

ให้ $F(x)$ และ $G(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และ $g(x)$ ตามลำดับ จะได้ว่า

① ถ้า c เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\int c f(x)\,dx = cF(x) + C$$

② $$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

<u>ตัวอย่าง</u> (ง่ายมาก ๆ): ① จงหาค่าของ

① $\int 4\cos x \, dx = 4\int \cos x \, dx$

$= 4(\sin x + C)$

$= 4\sin x + 4C = 4\sin x + C_1$

โดยที่ $C_1 = 4C$

② $\int (x + x^2) dx = \int x \, dx + \int x^2 dx$

$= \frac{x^2}{2} + C_1 + \frac{x^3}{3} + C_2$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C \; ; \; C = C_1 + C_2$

③ $\int (3x^6 - 7\sec^2 x + 3^x) dx = 3\int x^6 dx - 7\int \sec^2 x \, dx + \int 3^x dx$

$= \frac{3x^7}{7} - 7\tan x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

D

ในบางครั้ง เราจำเป็นต้องจัดรูปเพื่อทำให้การหาปริพันธ์ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง (ง่าย) จงหาค่าของ

① $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx$

$= \int \cot x \csc x \, dx = -\csc x + C$

(2) $$\int \frac{t^2-2t^4}{t^4}\,dt = \int\left(\frac{t^2}{t^4}-\frac{2t^4}{t^4}\right)dt$$
$$= \int t^{-2}\,dt - 2\int 1\,dt$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} - 2t + C$$
$$= -\frac{1}{t} - 2t + C$$

(3) $$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= x - \arctan x + C \qquad \square$$

1.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า

การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า มีแรงจูงใจจากการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ กล่าวคือ สมมติให้ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยการประยุกต์ใช้กฎลูกโซ่ เราจะได้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(g(x))$ คือ

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\,g'(x)$$

นั่นคือ ถ้าพิจารณาในบริบทของการหาปริพันธ์ จะได้ว่า

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

และเนื่องจาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f จึงได้ว่า

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

ขั้นตอนการหาปริพันธ์โดยการแทนค่า :

<u>Step</u> 1: มองหาพจน์ที่มีฟังก์ชันประกอบ $f(g(x))$
แล้วกำหนดให้ $u = g(x)$
ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$dx = \frac{du}{g'(x)}$$

จากนั้นจัดรูปให้ตัวแปรอยู่ในรูปตัวแปร u เท่านั้น

<u>Step</u> 2: หาปริพันธ์จากพจน์ตัวแปร u ใน Step 1.
<u>Step</u> 3: แทนค่า $u = g(x)$ กลับคืน และตอบในรูปตัวแปร x เท่านั้น

<u>ตัวอย่าง</u> (ง่าย ๆ ๆ ๆ) จงหาค่าของ

① $\int \sin(x+9)\,dx$

<u>วิธีทำ</u>. [มอง! $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = x+9$]

กำหนดให้ $\boxed{u = x+9}$ ได้ว่า $\frac{du}{dx} = \frac{d[x+9]}{dx} = 1$

$\Rightarrow \boxed{dx = du}$

พิจารณา $\int \sin(x+9)dx = \int \sin(u)\,du$

$= -\cos u + C$

$= -\cos(x+9) + C$

② $\int \cos 5x\,dx = \frac{\sin 5x}{5} + C$

③ $\int \frac{dx}{(\frac{1}{3}x-8)^5} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x-8\right)^{-4} + C$

④ $\int \frac{1}{1+3x^2}dx$

วิธีทำ [มอง! $g(x) = \sqrt{3}x$ และ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$]

กำหนดให้ $u = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sqrt{3} \Rightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{3}}$

พิจารณา $\int \frac{1}{1+3x^2}dx = \int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}dx$

$= \int \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{1+u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan u + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3}x + C \qquad \square$$