ตัวอย่าง : (กลาง) ลงหลายรอบ

① $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

วิธีทำ. กำหนดให้ $\boxed{u = \sin x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$

$$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{\cos x}}$$

พิจารณา

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

② $\int t^4 \left(\sqrt[3]{3-5t^5}\right) dt$

วิธีทำ. กำหนดให้ $u = 3 - 5t^5$

พิจารณา $\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}[3-5t^5] = (-5)(5t^4) = -25t^4$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{(-25)t^4} \checkmark$$

นั่นคือ $\int t^4\left(\sqrt[3]{3-5t^5}\right)dt = \int \cancel{t^4}\left(\sqrt[3]{u}\right)\frac{du}{(-25)\cancel{t^4}}$

$$= \left(-\frac{1}{25}\right)\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \left(-\frac{1}{25}\right)\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \left(-\frac{1}{25}\right)\frac{u^{4/3}}{4/3} + C$$

$$= -\frac{3}{100}(3-5t^5)^{4/3} + C$$

③ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$e^{2x} = (e^x)^2$
$= u^2$

วิธีทำ. กำหนดให้ $u = 1-e^{2x}$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -2e^{2x} \Rightarrow dx = \frac{du}{-2e^{2x}}$

นั่นคือ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{u}}\frac{du}{(-2)e^{2x}}$?

กำหนดให้ $u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{e^x}}$

นั่นคือ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{\cancel{u}}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{\cancel{u}}$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \arcsin u + C$$

$$= \arcsin(e^x) + C \qquad \square$$

ในบางครั้ง เราอาจจะต้องจัดรูปปริพัทธ์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นดังนี้

<u>ตัวอย่าง</u>: (ไม่ง่าย) ลองหาคำตอบ

① $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>. กำหนดให้ $\boxed{u = x-1} \Rightarrow x = u+1 \Rightarrow x^2 = (u+1)^2$

ดังนั้น $\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{dx = du}$

นั่นคือ

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \int x^2\sqrt{u}\,du$$

$$= \int (u+1)^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u+1)(u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u^2+u+u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u^2+2u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int \left(u^{5/2} + 2u^{3/2} + u^{1/2}\right) du$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 2\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{(x-1)^{7/2}}{7/2} + \frac{2(x-1)^{5/2}}{5/2} + \frac{(x-1)^{3/2}}{3/2} + C$$

② $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{3x^2} dx$

วิธีทำ. กำหนดให้ $u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d[x^{-1}]}{dx}$

$$= (-1)x^{-2} = -x^{-2}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-x^{-2}}$$

พิจารณา $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{3x^2} dx = \int \frac{\sin(u)}{3x^2} \frac{du}{(-x^{-2})}$

$$= \frac{1}{(-3)} \int \sin(u)\, du$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)(-\cos u) + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

③ $\int x^3 e^{x^4} dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

ดังนั้น $\int x^3 e^{x^4} dx = \int \cancel{x^3} e^u \frac{du}{4\cancel{x^3}}$

$= \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + C$

$= \frac{1}{4}e^{x^4} + C$

④ $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = e^x - e^{-x}$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x - (-e^{-x})$

$= e^x + e^{-x}$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{e^x + e^{-x}}$

ดังนั้น $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{\cancel{e^x + e^{-x}}}{u} \frac{du}{\cancel{e^x + e^{-x}}}$

$$= \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln|e^{x} - e^{-x}| + C$$

ฝาก! $\int [\sin(\sin\theta)]\cos\theta \, d\theta$

$\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}$ [+16 - 16]

$\int (\sec x + \tan x)^2 dx$ [$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$]

1.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติรูปแบบแน่นอน

ในหัวข้อนี้ เราจะฝึกหาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบดังนี้

(1) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

(2) $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ หรือ $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

และ (3) $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$ หรือ $\int \cos mx \cos nx \, dx$

$\boxed{1}$ ปริพันธ์ในรูป $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$	วิธีการ
① m เป็นจำนวนคี่	1. แยกพจน์ $\sin x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ กับ $\sin^{m-1} x$ ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยแทนค่า $u = \cos x$
② n เป็นจำนวนคี่	1. แยกพจน์ $\cos x$ ออกมา 2. ใช้สูตร $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ กับ $\cos^{n-1} x$ ที่เหลือ 3. อินทิเกรตโดยแทนค่า $u = \sin x$
③ m และ n เป็นจำนวนคู่	ใช้สูตร $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ และ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ เพื่อลดทอนเลขชี้กำลังของ $\sin^m x$ และ $\cos^n x$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$

<u>วิธีทำ</u>. [สังเกต! $m = 4$ และ $n = 5 \Rightarrow$ ②]

พิจารณา $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x \, dx$ [1.]

$$= \int \sin^4 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x \, dx$$

กำหนดให้ $\boxed{u = \sin x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow \boxed{dx = \frac{du}{\cos x}}$

พิจารณา

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x \, dx$$

$$= \int u^4 (1-u^2)^2 \cancel{\cos x} \, \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$(\text{ห}-\text{ล})^2 = \text{ห}^2 - 2\text{หล} + \text{ล}^2$

$$= \int u^4 (1-u^2)^2 \, du$$

$$= \int u^4 (1 - 2u^2 + u^4) \, du$$

$$= \int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du$$

$$= \frac{u^5}{5} - 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - 2\frac{\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C \quad \square$$

ฝาก! $\int \sin^7 2x \cos^{-3} 2x \, dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int \sin^7 2x \cos^{-3} 2x \, dx = \int \sin^6 2x \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx$$

$c^2 + s^2 = 1$

$s^2 = 1 - \cos^2 2x$

$$= \int (\sin^2 2x)^3 \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 2x)^3 \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx \quad (*)$$

กำหนดให้ $u = \cos 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{(-2)\sin 2x}$$

ดังนั้น

$$\int \sin^7 2x \cos^{-3} 2x \, dx = \int (1-\cos^2 2x)^3 \cos^{-3} 2x \sin 2x \, dx$$

$$= \int (1-u^2)^3 u^{-3} \cancel{\sin 2x} \frac{du}{(-2)\cancel{\sin 2x}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-u^2)^3 u^{-3} \, du$$

$(1-u^2)^3 = (1-u^2)(1-u^2)(1-u^2)$

$= (1 - u^2 - u^2 + u^4)(1-u^2)$

จุดคิด!

$$= (1-2u^2+u^4)(1-u^2)$$
$$= 1-u^2-2u^2+2u^4+u^4-u^6$$
$$= 1-3u^2+3u^4-u^6$$

$(ห-ล)^3 = ห^3 - 3ห^2ล + 3หล^2 - ล^3$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\int (1-3u^2+3u^4-u^6)u^{-3}\,du$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\int (u^{-3}-3u^{-1}+3u-u^3)\,du$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-2}}{-2} - 3\ln|u| + \frac{3u^2}{2} - \frac{u^4}{4}\right] + C$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\cos^{-2}2x}{-2} - 3\ln|\cos 2x| + \frac{3\cos^2 2x}{2} - \frac{\cos^4 2x}{4}\right] + C$$
$$= \frac{1}{4\cos^2 2x} + \frac{3}{2}\ln|\cos 2x| - \frac{3\cos^2 2x}{4} + \frac{\cos^4 2x}{8} + C$$

$\square$

ฝึก! $\int \sin^5 \frac{x}{2}\,dx$

<u>ตัวอย่าง</u> : จงหาค่าของ $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

<u>วิธีทำ</u> [<u>นึก!</u> $\sin^2 \blacksquare = \frac{1}{2}(1-\cos 2\blacksquare)$
$\cos^2 \blacksquare = \frac{1}{2}(1+\cos 2\blacksquare)$]

พิจารณา

$$\sin^2 x \cos^4 x = \sin^2 x \cdot (\cos^2 x)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2$$

$$= \frac{1}{8}(1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{8}[1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x-\cos^3 2x]$$

$$= \frac{1}{8}[1+\underbrace{\cos 2x}_{I_1}-\underbrace{\cos^2 2x}_{I_2}-\underbrace{\cos^3 2x}_{I_3}]$$

I_1; $\int \cos 2x\,dx$; $u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

นั่นคือ $\int \cos 2x\,dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\,du$

$$= \frac{1}{2}\sin u + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

$$I_2;\ \int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2(2x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1\,dx + \int \cos 4x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right] + C_2$$

$$I_3;\ \int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

กำหนดให้ $u = \sin 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\cos 2x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$\Rightarrow \int \cos^3 2x\,dx = \int (1 - u^2)\cancel{\cos 2x}\,\frac{du}{2\cancel{\cos 2x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u - \frac{u^3}{3}\right] + C_3$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6} + C_3$$

ดังนั้น $$\int \sin^2 2x \cos^4 2x\,dx = \frac{1}{8}\int [1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x]\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx - \int \cos^2 2x\,dx - \int \cos^3 2x\,dx\Big]$$

$$= \frac{1}{8}\Big[x + \cancel{\frac{1}{2}\sin 2x} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} - \cancel{\frac{\sin 2x}{2}} + \frac{\sin^3 2x}{6}\Big] + C$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin^3 2x}{6}\Big] + C$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$$

$\square$

ตัวอย่าง : จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{\sin^6 3x}{\cos^2 3x}\,dx$

วิธีทำ $$\frac{\sin^6 3x}{\cos^2 3x} = \frac{(1-\cos^2 3x)^3}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{1 - 3\cos^2 3x + 3\cos^4 3x - \cos^6 3x}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 3x} - 3 + 3\cos^2 3x - \cos^4 3x$$

$$= \underbrace{\sec^2 3x}_{①} \underbrace{- 3}_{②} \underbrace{+ 3\cos^2 3x}_{③} \underbrace{- \cos^4 3x}_{④}$$

(why?) $\Downarrow$

$$= \frac{\tan 3x}{3} - 3x$$

$\boxed{2}$ $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ / $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์เป็น 4 กรณีดังนี้

① n เป็นจำนวนคู่

② m เป็นจำนวนคี่

③ m เป็นจำนวนคู่และ n เป็นจำนวนคี่ [เอาไว้ก่อน]

④ $n = 0$

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ / $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$	วิธีการ (Method)
① n เป็นจำนวนคู่	① แทนพจน์ $\sec^2 x$ / $\csc^2 x$ ออกมา

	② ใช้สูตร $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ / $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$ กับพจน์ที่เหลือ ③ อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \tan x$ / $u = \cot x$
② m เป็นจำนวนคี่	① แยกพจน์ $\sec x \tan x$ / $\csc x \cot x$ ออกมา ② ใช้สูตร $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ / $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ กับพจน์ที่เหลือ ③ อินทิเกรตโดยการแทนค่า $u = \sec x$ / $u = \csc x$
③ $n = 0$	สูตรลดทอน! $m \geq 2$ $\int \tan^m x\,dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx$ $\int \cot^m x\,dx = \frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\int \tan^{-2} 2x \sec^4 2x\,dx$

วิธีทำ [สังเกต! $m=-2, n=4 \Rightarrow$ ①]

พิจารณา $\int \tan^{-2}2x\sec^4 2x\,dx = \int \tan^{-2}2x\sec^2 2x\sec^2 2x\,dx$

$$= \int \tan^{-2}2x(\tan^2 2x+1)\sec^2 2x\,dx$$

กำหนดให้ $u = \tan 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\sec^2 2x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2\sec^2 2x}$$

นั่นคือ

$$\int \tan^{-2}2x\sec^4 2x\,dx = \int \tan^{-2}2x(\tan^2 2x+1)\sec^2 2x\,dx$$

$$= \int u^{-2}(u^2+1)\cancel{\sec^2 2x}\frac{du}{2\cancel{\sec^2 2x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-2}(u^2+1)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+u^{-2})\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u + \frac{u^{-1}}{(-1)}\right] + C$$

$$= \frac{\tan 2x}{2} - \frac{1}{2\tan 2x} + C \qquad \square$$

ฝาก! $\int \csc^8 5x\,dx$

วิธีทำ. [สังเกต! $m=0, n=8 \Rightarrow$ 1]

พิจารณา $\int \csc^8 5x\,dx = \int \csc^6 5x \csc^2 5x\,dx$

$$= \int (\csc^2 5x)^3 \csc^2 5x\,dx$$

$$= \int (\cot^2 5x + 1)^3 \csc^2 5x\,dx$$

กำหนดให้ $u = \cot 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -5\csc^2 5x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{(-5)\csc^2 5x}$$

นั่นคือ $\int \csc^8 5x\,dx = \int (\cot^2 5x + 1)^3 \csc^2 5x\,dx$

$$= \int (u^2+1)^3 \cancel{\csc^2 5x} \frac{du}{(-5)\cancel{\csc^2 5x}}$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right) \int (u^2+1)^3\,du$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right) \int (u^6 + 3u^4 + 3u^2 + 1)\,dx$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\left[\frac{u^7}{7} + \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^3}{3} + u\right] + C$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\left[\frac{\cot^7 5x}{7} + \frac{3\cot^5 5x}{5} + \cot^3 5x + \cot 5x\right]$$

$$+ C$$

D

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \sqrt{\sec x}\tan^3 x\,dx$

วิธีทำ [สังเกต! $m = 3,\ n = \frac{1}{2} \Rightarrow (2)$]

พิจารณา $\int \sqrt{\sec x}\tan^3 x\,dx = \int \tan^3 x \sec^{\frac{1}{2}} x\,dx$

$$= \int \tan^2 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \sec x \tan x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{1}{2}} x \sec x \tan x\,dx$$

กำหนดให้ $u = \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{\sec x}\tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{1}{2}} x \sec x \tan x\,dx$

$$= \int (u^2 - 1)u^{-\frac{1}{2}} \sec x \tan x\,dx$$

$\sec x \tan x$

$$= \int (u^2-1)u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int \left(u^{3/2} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \frac{2\sec^{5/2}x}{5} - 2\sec^{1/2}x + C \quad \square$$

ตัวอย่าง : จงหาค่าของ $\int \tan^5 x\,dx$

Note! $\int \tan^m x\,dx = \frac{\tan^{m-1}x}{m-1} - \int \tan^{m-2}x\,dx$

วิธีทำ

$$\int \tan^5 x\,dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 x\,dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \left[\frac{\tan^2 x}{2} - \int \tan x\,dx\right]$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C \quad \square$$

ตัวอย่าง. จงหาค่าของ $\int \tan^{-7} 2x \, dx$

วิธีทำ
$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \tan^{-1} x$$
$$\Rightarrow \tan^{-7} 2x = \frac{1}{\tan^7 2x} = \cot^7 2x$$

Note! $\int \cot^m 2x \, dx = \frac{\cot^{m-1} 2x}{2(m-1)} - \frac{1}{2}\int \cot^{m-2} 2x \, d(2x)$

$$\int \cot^7 2x \, dx = \int \cot^5 2x \cot^2 2x \, dx$$
$$= \int \cot^5 2x (\csc^2 2x - 1) \, dx$$
$$= \int \cot^5 2x \csc^2 2x \, dx - \int \cot^5 2x \, dx$$
$$= \int \cot^5 2x \csc^2 2x \, dx - \int \cot^3 2x (\csc^2 2x - 1) \, dx$$
$$= \int \cot^5 2x \csc^2 2x \, dx - \int \cot^3 2x \csc^2 2x \, dx$$
$$+ \int \cot^3 2x \, dx$$

$$= \int \cot^5 2x \csc^2 2x\,dx - \int \cot^3 2x \csc^2 2x\,dx + \int \cot 2x(\csc^2 2x - 1)\,dx$$

$$= \int \cot^5 2x \csc^2 2x\,dx - \int \cot^3 2x \csc^2 2x\,dx + \int \cot 2x \csc^2 2x\,dx - \underline{\int \cot 2x\,dx}$$

$= \dots$ [แทน $u = \cot 2x$]

③ การหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูป $\int \sin mx \cos nx\,dx$, $\int \sin mx \sin nx\,dx$ หรือ $\int \cos mx \cos nx\,dx$

ในการหาปริพันธ์กลุ่มนี้ต้องอาศัยเอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้

จำ!

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$
$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

จำ!

<u>ตัวอย่าง</u> : จงหาค่าของ $\int \cos 3x \sin 5x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\cos 3x \sin 5x = \sin 5x \cos 3x$

$$= \frac{1}{2}[\sin(5x-3x) + \sin(5x+3x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(2x) + \sin(8x)\right]$$

ดังนั้น $\int \cos 3x \sin 5x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin 2x + \sin 8x\right] dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8}\right) + C$$

$$= -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> : จงหาค่าของ $\int \sin 7x \sin 10x \, dx$

<u>ตอบ!</u> $-\frac{\sin(-3x)}{6} - \frac{\sin 17x}{34} + C$

<u>ตัวอย่าง</u>. จงหาค่าของ $\int \sin x \cos 2x \sin 4x \, dx$

<u>วิธีทำ</u>. พิจารณา

$$\sin x \cos 2x \sin 4x = (\sin x \cos 2x) \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(x-2x) + \sin(x+2x)\right] \cdot \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(-x) + \sin(3x)]\sin 4x$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(-x)\sin 4x + \sin 3x \sin 4x]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\big(\cos(-x-4x) - \cos(-x+4x)\big)$$

$$+ \frac{1}{2}\big(\cos(3x-4x) - \cos(3x+4x)\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}[\cos(-5x) - \cos(3x)]$$

$$+ \frac{1}{4}[\cos(-x) - \cos(7x)]$$

$$= \frac{1}{4}[\cos(-5x) - \cos 3x + \cos(-x) - \cos(7x)]$$

ดังนั้น

$$\int \sin x \cos 2x \sin 4x \, dx = \frac{1}{4}\int [\cos(-5x) - \cos 9x + \cos(-x)$$

$$- \cos 7x]\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{\sin(-5x)}{(-5)} - \left(-\frac{\sin 3x}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\sin(-x)}{(-1)}\right) - \left(-\frac{\sin 7x}{7}\right)\right] + C$$

$$= \frac{\sin(-5x)}{20} + \frac{\sin 3x}{12} + \frac{\sin(-x)}{4} + \frac{\sin 7x}{28} + C$$

<u>dhn</u>! $\int (\cos^2 x - \sin 3x)^2 \, dx$