บทที่ 1

เทคนิคการหาปริพันธ์

<u>ทบทวน</u>! สูตรการหาอนุพันธ์และปริพันธ์

Diff.	Integrate.
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int 1\,dx = x + C$
$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}\ (r \neq -1)$	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\ (r \neq -1)$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a \ (0<a\neq 1) \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

✓ $$\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$ ✓ $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\frac{d}{dx}[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec}|x| + C$$

สมบัติพื้นฐานของปฏิยานุพันธ์:

ให้ $F(x)$ และ $G(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และ $g(x)$ ตามลำดับ จะได้ว่า

① ถ้า c เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\int cf(x)\,dx = cF(x) + C$$

$$② \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = F(x) \pm G(x) + C$$

ตัวอย่าง: (ง่าย ๆ ๆ ๆ) ลองทำก่อน

$$① \int 4\cos x\,dx = 4\int \cos x\,dx = 4(\sin x + C)$$

$$= 4\sin x + 4C$$

$$= 4\sin x + C_1 ;\ C_1 = 4C$$

$$② \int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$③ \int (3x^6 - 7\sec^2 x + 3^x)\,dx = 3\int x^6\,dx - 7\int \sec^2 x\,dx + \int 3^x\,dx$$

$$= \frac{3x^7}{7} - 7\tan x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

D

ในบางครั้ง เราจำเป็นต้องจัดรูปเพื่อที่จะหาปริพันธ์ได้สะดวกขึ้น

ตัวอย่าง: (ง่าย ๆ)

$$① \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}\,dx$$

$$= \int \cot x \csc x \, dx = -\csc x + C$$

② $\int \left(\frac{t^2 - 2t^4}{t^4} \right) dt = \int \left(\frac{t^2}{t^4} - \frac{2t^4}{t^4} \right) dt$

$$= \int t^{-2} \, dt - 2 \int dt$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} - 2t + C = -\frac{1}{t} - 2t + C$$

③ $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$

$$= \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \int 1 \, dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= x - \arctan x + C \qquad \square$$

1.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า

ถ้าเห็นฟังก์ชันประกอบ $f(g(x))$

$\sin(x^2)$: $g(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$

$\sqrt{\tan x}$: $g(x) = \tan x$, $f(x) = \sqrt{x}$

<u>หลักการ!</u>

<u>Step</u> 1: มองหาฟังก์ชัน $f(g(x))$ แล้ว

กำหนดให้ $u = g(x)$ [ให้ u เป็นไส้]

และหา $dx = \frac{du}{g'(x)}$

แล้วแทนค่าในพจน์นี้ให้เหลือเฉพาะตัวแปร u เท่านั้น

Step 2: หาปริพันธ์ของพจน์ของตัวแปร u นี้ จากนั้นแทนค่า $u = g(x)$ ให้เหลือเฉพาะตัวแปร x เท่านั้น

<u>ตัวอย่าง</u> (ง่าย ๆ) ลองหาค่าของ

① $\int \sin(x+9)\,dx$

<u>วิธีทำ</u> [มองหาไส้]

กำหนดให้ $u = x+9$

ดังนั้น $\frac{du}{dx} = \frac{d[x+9]}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{dx = du}$

ดังนั้น $\int \sin(x+9)\,dx = \int \sin u\,du$ ✓

$= -\cos u + C = -\cos(x+9) + C$

② $\int \cos 5x\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{5}$

ดังนั้น $\int \cos 5x\,dx = \int \cos u \,\frac{du}{5}$

$$= \frac{1}{5}\int \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{5}\sin u + C = \frac{\sin 5x}{5} + C$$

③ $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{3}x-8\right)^5}$

วิธีทำ. กำหนด $u = \frac{1}{3}x - 8 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow dx = 3\,du$$

พิจารณา

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{3}x-8\right)^5} = \int \frac{1}{u^5} 3\,du$$

$$= 3\int \frac{1}{u^5}\,du = 3\int u^{-5}\,du$$

$$= \frac{3u^{-4}}{-4} + C$$

$$= -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x-8\right)^{-4} + C \quad \square$$

ฝาก! $\displaystyle\int \frac{1}{1+3x^2}\,dx$

วิธีทำ. กำหนดให้ $u = \sqrt{3}x$