ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-1}{x^2-2x-3}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\deg(2x^3-4x^2-x-1) = 3 > \not< \; 2 = \deg(x^2-2x-3)$$

เนื่องจากฟังก์ชันที่พิจารณาไม่ใช่เศษส่วนแท้ จึงต้องทำการหารยาว ดังนี้

$$\begin{array}{r l}
 & 2x \\
\cline{2-2}
x^2-2x-3 \big) & 2x^3-4x^2-x-1 \\
 & \underline{2x^3-4x^2-6x} \\
 & \qquad\qquad 5x-1
\end{array}$$

ดังนั้น
$$\frac{2x^3-4x^2-x-1}{x^2-2x-3} = 2x + \frac{5x-1}{x^2-2x-3}$$
$$= 2x + \frac{5x-1}{(x-3)(x+1)}$$

พิจารณา
$$\frac{5x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+1}$$
$$= \frac{A_1(x+1)+A_2(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$
$$= \frac{A_1x+A_1+A_2x-3A_2}{(x-3)(x+1)}$$
$$= \frac{(A_1+A_2)x+(A_1-3A_2)}{(x-3)(x+1)}$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\left.\begin{aligned} A_1+A_2 &= 5 \\ A_1-3A_2 &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A_1 &= 5-A_2 \\ 5-A_2-3A_2 &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -4A_2 = -6 \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow A_1 = 5-\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

ดังนั้น $\dfrac{2x^3-4x^2-x-1}{x^2-2x-3} = 2x + \dfrac{5x-1}{x^2-2x-3}$

$$= 2x + \frac{7}{2(x-3)} + \frac{3}{2(x+1)}$$

จึงได้ว่า

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-1}{x^2-2x-3}\,dx = \int 2x\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x^2 + \frac{7}{2}\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + c$$

D

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}\,d\theta$

วิธีทำ. กำหนดให้ $x = \cos\theta$

จะได้ว่า $\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \Rightarrow d\theta = \dfrac{dx}{-\sin\theta}$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}\,d\theta = \int \frac{\cancel{\sin\theta}}{x^2+x-2}\,\frac{dx}{(-\cancel{\sin\theta})}$

$$= -\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$$

พิจารณาฟังก์ชัน $\frac{1}{x^2+x-2}$ ซึ่งเป็นเศษส่วนแท้ และได้ว่า

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$$

ซึ่งได้เศษส่วนย่อยอยู่ในรูป

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1}$$

$$= \frac{A_1(x-1) + A_2(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x + (-A_1+2A_2)}{(x+2)(x-1)}$$

ทำให้

$$\left.\begin{aligned} A_1+A_2 &= 0 \\ -A_1+2A_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A_2 &= -A_1 \\ A_2+2A_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{A_1 = -\frac{1}{3}}$$

ดังนั้น $\frac{1}{(x+2)(x-1)} = -\frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}$

ทำให้

$$-\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = -\left(-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta+2}{\cos\theta-1}\right| + C$$

1.7 การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x\cdot x\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x\,dx \cdot \int x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

จะเห็นว่า

$$\int x\cdot x\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int x\,dx$$

นั่นคือ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ จึงไม่จำเป็นว่า

$$\int f(x)g(x)\,dx \overset{?}{=} \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

พิจารณา

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

จะได้ว่า $\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$

$\Rightarrow \quad f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$

$\Rightarrow \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

กำหนดให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ จะได้ว่า

$du = f'(x)dx$ และ $dv = g'(x)dx$

จึงได้สูตรของการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน เป็น

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$ Integration by Part

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\int x e^x dx$

<u>วิธีทำ</u>. กำหนดให้ $u = e^x$ และ $dv = x\,dx$

จะได้ว่า $\frac{du}{dx} = e^x$ และ $\int dv = \int x\,dx$

$\Rightarrow \quad du = e^x dx$ และ $v = \frac{x^2}{2}$

จึงได้ว่า

$$\int xe^x dx = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx \quad ?$$

กำหนดให้ $u = x$ และ $dv = e^x dx$

$\Rightarrow$ $\frac{du}{dx} = 1$ และ $\int dv = \int e^x dx$

$\Rightarrow$ $du = dx$ และ $v = e^x$

ดังนั้น

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int x\cos x\,dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = x$ และ $dv = \cos x\,dx$

$\Rightarrow$ $du = dx$ และ $v = \sin x$

ดังนั้น

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \ln x\,dx$ เมื่อ $x > 0$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = \ln x$ และ $dv = dx$

$$\Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{และ} \quad v = x$$

ดังนั้น $$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= x\ln x - \int 1\,dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

$\square$

<u>ฝึก</u>! $$\int x^2 e^{-x}\,dx$$