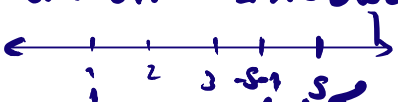
สมบัติของอาร์คิมีดีส (Archimedean Properties)

ทฤษฎีบท: (AP)

เซตของจำนวนนับ $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบนใน $\mathbb{R}$

[The set of natural numbers is unbounded from above in $\mathbb{R}$]

พิสูจน์ สมมติให้แย้งว่า $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบน โดยการประยุกต์ใช้สัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบนน้อยสุด กำหนดให้เป็น $s = \sup \mathbb{N}$



เนื่องจาก s เป็นขอบเขตบนน้อยสุด จะพบว่า $s-1$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\mathbb{N}$ ดังนั้น จะมีจำนวนนับ n ที่ทำให้

$$n > s-1$$

ทำให้ได้ว่า $n+1 > s$

เนื่องจาก $n+1 \in \mathbb{N}$ จึงส่งผลให้ s ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\mathbb{N}$ ซึ่งขัดแย้ง s เป็นขอบเขตบนน้อยสุด

เพราะฉะนั้น $\mathbb{N}$ เป็นเซตไม่มีขอบเขตบน

$\square$

ทฤษฎีบท: ข้อความต่อไปนี้สมมูลกับ (AP)

(1) สำหรับแต่ละ $z \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > z$

(2) สำหรับแต่ละ $x > 0$ และ $y \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $nx > y$

(3) สำหรับแต่ละ $x > 0$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{n} < x$

พิสูจน์. (AP) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (AP)

(AP) $\Rightarrow$ (1) รู้! เซตของจำนวนนับไม่มีขอบเขตบน
สมมติให้ $z_0 \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
$n \le z_0$ นั่นคือ z_0 เป็นขอบเขตบนของ $\mathbb{N}$
แต่ $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขต จึงเกิดข้อขัดแย้ง
เพราะฉะนั้น (1) เป็นจริง

(1) $\Rightarrow$ (2) สมมติ (1) เป็นจริง
[$\forall z \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n > z$]
[จะแสดงว่า $\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $nx > y$]
ให้ $x > 0$ และ $y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $z := \frac{y}{x} \in \mathbb{R}$

โดย (1) จะได้ว่า มี $n \in \mathbb{N}$ $n > z = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow xn > y$

(2) $\Rightarrow$ (3) สมมติ (2) เป็นจริง
[$\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $nx > y$]
[จะแสดงว่า $\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $0 < \frac{1}{n} < x$]
ให้ $x > 0$ และพิจารณา $y = 1$ โดยการใช้ (2)
จะได้ว่า มี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $nx > 1$
ส่งผลให้ $x > \frac{1}{n}$
และเนื่องจากว่า $n > 0$ จึงได้ว่า $\frac{1}{n} > 0$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{n} < x$

(3) $\Rightarrow$ (AP) สมมติ (3) เป็นจริง

[$\forall x>0, \exists n\in\mathbb{N}$ s.t. $0<\frac{1}{n}<x$]

[จะแสดงว่า $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน]

สมมติไว้แล้วว่า $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบน กำหนดให้เป็น $s\in\mathbb{R}$

จะได้ว่า $s \geq n$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

กำหนดให้ $k := s+1 \in \mathbb{R}$

พิจารณา $k = s+1 \geq n+1 \Rightarrow k \geq n+1$

$$\Rightarrow k-1 \geq n$$

$$\Rightarrow k > k-1 \geq n$$

$$\Rightarrow \boxed{k>n}$$

นั่นคือ $\frac{1}{k} < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

นั่นคือ มี $x := \frac{1}{k} > 0$ ที่ทำให้ $\frac{1}{n} > x$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

ซึ่งขัดแย้งกับ (3) เพราะฉะนั้น $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน

□

ความหนาแน่นของจำนวนตรรกยะ
(Density of rational numbers)

<u>ทฤษฎีบท</u>: Density of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง ที่ $x<y$ แล้วจะมีจำนวนตรรกยะ r ที่ทำให้ $x<r<y$

พิสูจน์ : รู้ ! $[\forall z \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } z > \frac{1}{n}]$

กรณีที่ 1: สมมติให้ $x > 0$ จะได้ $y > x > 0$
ดังนั้น $y - x > 0$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$y - x > \frac{1}{n} \Rightarrow ny - nx > 1$$

$$\Rightarrow ny > 1 + nx \quad \text{—} (*)$$

เนื่องจาก $nx > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนนับ m ที่ทำให้

$$m - 1 \leq nx < m \quad \text{—} (**)$$

ส่งผลให้

$$m \leq nx + 1 < ny$$

ทำให้ได้ว่า

$$nx < m < ny$$

ดังนั้น

$$x < \frac{m}{n} < y$$

ซึ่งหมายความว่า มีจำนวนตรรกยะ $r := \frac{m}{n}$ ที่ทำให้

$$x < r < y$$

กรณีที่ 2: สมมติให้ $x \leq 0$ จะได้ว่า $|x| \geq 0$
จะมี $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $k > |x| \geq x$
ดังนั้น $k + x > 0$
เนื่องจาก $x < y \Rightarrow 0 < x + k < y + k$
โดยการประยุกต์ใช้กรณีที่ 1 จะได้ว่า มี $q \in \mathbb{Q}$ ที่ทำให้

$$x + k < q < y + k$$

$\Rightarrow$

$$x < q - k < y$$

โดยการกำหนดให้ $r := q - k \in \mathbb{Q}$ จึงได้ว่ามี $r \in \mathbb{Q}$ ที่ทำให้

$$x < r < y. \qquad \square$$