Hiene-Borel Theorem :

ถ้า $S \subseteq \mathbb{R}$ จะได้ว่า

S is compact $\Leftrightarrow$ S is closed and bounded.

<u>ทฤษฎีบท</u>: ให้ $\mathcal{F}=\{K_\alpha : \alpha \in A\}$ เป็นวงศ์ของเซตcompact ใน $\mathbb{R}$ สมมติว่า ผลตัดของวงศ์ย่อยจำกัดของ $\mathcal{F}$ ไม่เป็นเซตว่าง แล้ว $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \emptyset$

[$\mathcal{F}=\{K_\alpha \text{ is compact} : \alpha \in A\}$
if any finite intersection of elements of $\mathcal{F}$ is nonempty, then

$$\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \emptyset$$]

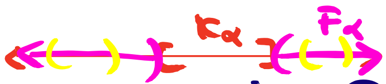
<u>พิสูจน์</u> ให้ $F_\alpha := \mathbb{R}\setminus K_\alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in A$

เนื่องจาก K_α is compact จะได้ว่า K_α is closed

ส่งผลให้ F_α is open

จะแสดงว่า $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \emptyset$ โดยสมมติว่า $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha = \emptyset$

นั่นคือ จะมี $K_0 \in \mathcal{F}$ ที่ทำให้



$K_0 \cap K_\alpha = \emptyset$ สำหรับทุก $\alpha \in A$

จะได้ว่า $K_0 \subseteq F_\alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in A$

นั่นคือ

$$K_0 \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$$

จะได้ว่า $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ เป็น open cover of K_0.

เนื่องจาก K_0 is compact จะได้ว่ามี $\{F_{\alpha_i} : i=1,\dots,n\}$ ที่ทำให้

$$K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$$

พิจารณา

$$F_{\alpha_1} \cup F_{\alpha_2} \cup \cdots \cup F_{\alpha_n} = (\mathbb{R}\setminus K_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup (\mathbb{R}\setminus K_{\alpha_n})$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbb{R}\setminus K_{\alpha_i})$$

$$= \mathbb{R}\setminus \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}$$

ส่งผลให้

$$K_0 \subseteq \mathbb{R}\setminus \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}$$

$$\Rightarrow K_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} = \emptyset \quad ↯$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ว่า ผลตัดของวงศ์ย่อยจำกัดของ F ต้องไม่เป็นเซตว่าง

เพราะฉะนั้น $K_0 \subseteq K_\alpha \ \forall \alpha \in A$

ดังนั้น $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset$

□

ทฤษฎีบท: (The Nested Intervals Theorem)

ให้ $\mathcal{F}=\{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ เป็นวงศ์ของ nonempty closed and bounded subset of $\mathbb{R}$

ถ้า สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$, $A_{n+1}\subseteq A_n$

แล้ว $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$

พิสูจน์ กำหนดให้ $n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ ที่สอดคล้องกับ

$$n_1<n_2<n_3<\dots<n_k$$

จะได้ว่า

$$A_{n_1}\supseteq A_{n_2}\supseteq A_{n_2}\cdots\supseteq A_{n_k}$$

ทำให้ $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_{n_i} = A_{n_k}\neq\emptyset$

เพราะฉะนั้น $\mathcal{F}$ has the finite intersection property จะได้ว่า

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\neq\emptyset$$

$\square$

ทฤษฎีบท: (Bolzano-Weierstrass Theorem)

If a bounded subset $S\subseteq\mathbb{R}$ contains infinitely many points, then there exists at least one accumulation point of S.

<u>พิสูจน์</u> ให้ S เป็น bounded set ที่มีสมาชิกจำนวนอนันต์

จะแสดงว่า $S' \neq \emptyset$ สมมติโดยแย้งให้ $S' = \emptyset$

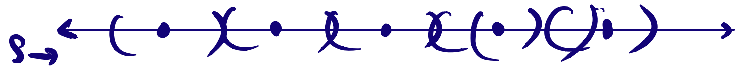
ดังนั้น $\mathrm{cl}\, S = S \cup S' = S \cup \emptyset = S$

และเนื่องจาก $\mathrm{cl}\, S$ is closed จึงได้ว่า S is also closed.

นั่นคือ S is compact.

เนื่องจาก $S' = \emptyset$ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x \in S$

จะมี d-nbhd $N_x^* \cap S = \emptyset \Rightarrow N_x \cap S = \{x\}$



เนื่องจาก $\{N_x : x \in S\}$ เป็น open cover ของ S

และเนื่องจาก S เป็น compact set จะได้ว่ามี $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ที่ทำให้

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} S &= S \cap \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (S \cap N_{x_i}) \\ &= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \end{aligned}$$

ซึ่งหมายความว่า S มีสมาชิกจำนวนจำกัด ↯

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $S' \neq \emptyset$

$\square$

Chapter 4.

Sequences (ลำดับ)

4.1 Convergence (การลู่เข้า)

A sequence is a function which domain is $\mathbb{N}$ and its codomain is $\mathbb{R}$

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $S(n) \in \mathbb{R}$

$S(n) = s_n$ / s^n

$(s_1, s_2, s_3, \dots) = (s_n)_{n=1}^{\infty}$

$(s_n)_{n \geq 1}$

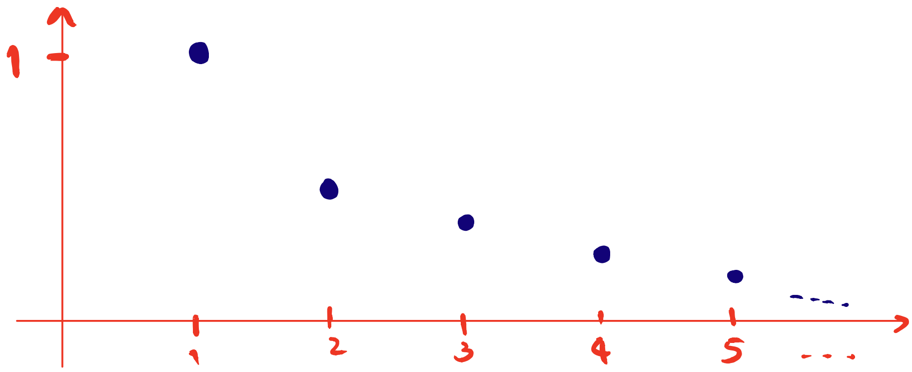
$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(s_n)

If $D_s = \mathbb{N} \cup \{0\}$, then we write $(s_n)_{n=0}^{\infty}$

If $D_s = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ then we write $(s_n)_{n=m}^{\infty}$

พิจารณาลำดับ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right)$



บทนิยาม: A sequence $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ is said to be converge (ลู่เข้า) to $s \in \mathbb{R}$ if

for every $\varepsilon > 0$, there exists $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that for all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_\varepsilon$ implies

$$|s_n - s| < \varepsilon$$

If (s_n) converges to s, then s is called limit of the sequence (s_n) and we write

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim s_n = s$, $s_n \rightarrow s$

ตัวอย่าง: Show that $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

วิธีทำ Let $\varepsilon > 0$ be given. By the Archimedean property, there must exist $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that

$$0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon \qquad \left[\frac{1}{n} \le \frac{1}{N_\varepsilon}\right]$$

Thus, for any $n \geq N_\varepsilon$, we have

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Therefore, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ $\square$

whn! 1 Show that $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = 0.$

2 Show that $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^3-5} = ?$