ทฤษฎีบท: ถ้าลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $s \in \mathbb{R}$
ซึ่งสอดคล้องกับ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ ถ้ามี $C > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$
ที่ทำให้ $|s_n - s| \le C a_n$ สำหรับทุก $n \geq m$
แล้ว $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$
เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ โดยนิยามของการลู่เข้า จะมี $N \in \mathbb{N}$
ที่ทำให้ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า $|a_n| < \varepsilon / C$
เพราะว่า สำหรับทุก $n \geq m$ จะได้ว่า $|s_n - s| \le C|a_n|$
กำหนดให้ $N_1 := \max\{N, m\}$ จะได้ว่า
[สำหรับทุก $n \geq N_1$ จะได้ว่า $|a_n| < \varepsilon$
และ สำหรับทุก $n \geq N_1$ จะได้ว่า $|s_n - s| \le C|a_n|$]
เพราะฉะนั้น สำหรับทุก $n \geq N_1$ จะได้ว่า

$$|s_n - s| \le C|a_n| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ∎

ทฤษฎีบท: ถ้าลำดับลู่เข้า แล้ว ลิมิตจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

[If a sequence converges, then its limit is unique]

พิสูจน์ ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า และสมมติว่า s และ t เป็นลิมิตของลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ จะต้องมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$$

และในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} s_n = t$ จะต้องมี $N_2 \in \mathbb{N}$

ที่ทำให้

$$|s_n - t| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$$

กำหนดให้ $N := \max\{N_1, N_2\}$

พิจารณา สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|s - t| &= |s - s_n + s_n - t| \\
&\leq |s - s_n| + |s_n - t| \\
&= |s_n - s| + |s_n - t| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2
\end{aligned}$$

$$= 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

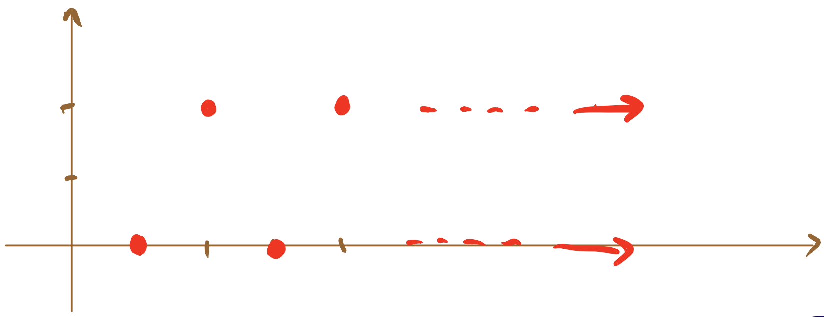
เนื่องจาก $|s-t| \le \varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ ทำให้ได้ว่า

$$0 \le |s-t| \le 0 \Rightarrow |s-t| = 0 \Rightarrow s-t = 0$$

$$\Rightarrow s = t$$

เพราะฉะนั้น ลิมิตของลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ∎

พิจารณาลำดับ $(1+(-1)^n)_{n=1}^{\infty}$



<u>บทนิยาม</u>: เราจะกล่าวว่า ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต (bounded sequence) ถ้า มีจำนวนจริง $M \ge 0$ ที่ทำให้ $|s_n| \le M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

[$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ is bounded $\Leftrightarrow \exists M \ge 0$ s.t. $|s_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$

<u>ทฤษฎีบท</u>: ทุก ๆ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า และสมมติให้ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

ให้ $\varepsilon = 1$ โดยนิยามของการลู่เข้า

จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $|s_n - s| < 1$ สำหรับทุก $n \geq N_1$

พิจารณา

$$|s_n| = |s_n - s + s|$$

$$\leq |s_n - s| + |s| \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น สำหรับทุก $n \geq N_1$ จะได้ว่า

$$|s_n| \leq |s_n - s| + |s| < 1 + |s|$$

กำหนดให้ $M := \max\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_{N_1-1}|, 1+|s|\}$

ดังนั้น

$$|s_n| \leq M \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

เพราะฉะนั้น $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

$\square$