นิยาม: ให้ S เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง

(1) เราจะกล่าวว่า จำนวนจริง u เป็น ขอบเขตบน (upper bound) ของ S ถ้า

$$u \geq s \quad \text{สำหรับทุก } s \in S$$

(2) เราจะกล่าวว่า จำนวนจริง l เป็น ขอบเขตล่าง (lower bound) ของ S ถ้า

$$l \leq s \quad \text{สำหรับทุก } s \in S$$

(3) เราจะกล่าวว่า S เป็น เซตมีขอบเขต (bounded set) ถ้า S มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

(4) เราจะกล่าวว่า ขอบเขตบน u ของ S เป็น ค่าสูงสุด (maximum) ของ S ถ้า $u \in S$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $u := \max S$

(5) เราจะกล่าวว่า ขอบเขตล่าง l ของ S เป็น ค่าต่ำสุด (minimum) ของ S ถ้า $l \in S$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $l = \min S$

(6) ถ้า S มีขอบเขตบน เราจะเรียกขอบเขตบนที่มีค่าน้อยสุดว่า ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound / supremum) และเขียนแทนด้วย $\sup S$

(7) ถ้า S มีขอบเขตล่าง เราจะเรียกขอบเขตล่างที่มีค่ามากสุดว่า ขอบเขตล่างมากสุด (greatest lower bound / infimum)

และเรียกแทนด้วย $\inf S$

สัจพจน์ความบริบูรณ์ (the Completeness Axiom)

ทุกเซตย่อย S ของ $\mathbb{R}$ ที่ไม่เป็นเซตว่างซึ่งมีขอบเขตบน จะมีขอบเขตบนน้อยสุดเสมอ

[Every nonempty subset S of $\mathbb{R}$ that is bounded above has a supremum.]

ทฤษฎีบท: ให้ A และ B เป็นเซตของจำนวนจริงใดๆ และกำหนดให้

$$C = \{x+y : x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

ถ้า A และ B มีขอบเขตบนน้อยสุดแล้ว C มีขอบเขตบนน้อยสุด โดยที่

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

พิสูจน์. เนื่องจาก A และ B มีขอบเขตบนน้อยสุด กำหนดให้

$$a = \sup A \text{ และ } b = \sup B$$

ให้ $z \in C$ เป็นสมาชิกใดๆ จะได้ว่า

$$z = x + y \quad \text{โดยที่ } x \in A \text{ และ } y \in B$$
$$\leq a + b$$

นั่นคือ $a+b$ เป็นขอบเขตบนของ C

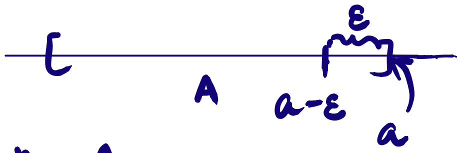
โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จึงได้ว่า C มีขอบเขตบนน้อยสุด ซึ่งกำหนดให้เป็น $c = \sup C$ ส่งผลให้

$$c \leq a + b$$

นั่นคือ $$\sup C \leq \sup A + \sup B$$

ในอีกด้านหนึ่ง เราจะแสดงว่า $\sup C \geq \sup A + \sup B$ $[c \geq a+b]$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$



เนื่องจาก $a = \sup A$ จะพบว่า

$a - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ A

นั่นคือ จะมี $x \in A$ ที่

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < x \quad — ①$$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $b = \sup B$ จะพบว่า $b - \varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ B นั่นคือ จะมี $y \in B$ ที่

$$b - \frac{\varepsilon}{2} < y \quad — ②$$

นำ ① รวมกับ ② จะได้

$$(a+b) - 2\frac{\varepsilon}{2} < x+y \leq c$$

$$\Rightarrow \quad a+b \leq c + \varepsilon$$

ดังนั้น $a+b \leq c$

เพราะฉะนั้น $a+b = c$ ซึ่งหมายความว่า

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

$\square$

<u>นิยาม:</u> ให้ D เป็นเซตของจำนวนจริงใด ๆ
กำหนดให้ $f: D \to \mathbb{R}$

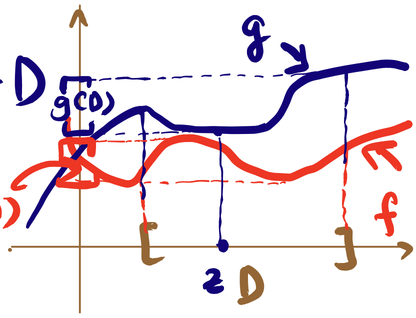
(1) เราจะกล่าวว่า f มีขอบเขตบน ถ้าเซต $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ มีขอบเขตบนใน $\mathbb{R}$ $[\exists s \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f(x) \leq s \ \forall x \in D]$

(2) เราจะกล่าวว่า f มีขอบเขตล่าง ถ้าเซต $f(D)$ มีขอบเขตล่างใน $\mathbb{R}$ $[\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f(x) \geq \ell \ \forall x \in D]$

(3) เราจะกล่าวว่า f มีขอบเขต ถ้าเซต $f(D)$ มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง $[\exists m \in \mathbb{R} \text{ s.t. } |f(x)| \leq m \ \forall x \in D]$
(Why?)

ทฤษฎีบท: สมมติให้ $D \subseteq \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง และ $f: D \to \mathbb{R}$
และ $g: D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง
ถ้า $f(x) \le g(y)$ สำหรับทุก $x, y \in D$
แล้ว $f(D)$ มีขอบเขตบน
$g(D)$ มีขอบเขตล่าง
และ

$$\sup f(D) \le \inf g(D)$$



พิสูจน์. ให้ $z \in D$ เป็นจุดใดๆ

$$f(x) \le g(z) \quad \forall x \in D$$

ส่งผลให้ $f(D)$ มีขอบเขตบนคือ $g(z)$
โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\sup f(D)$ หาค่าได้
โดยที่ $\sup f(D) \le g(z)$
เนื่องจาก z เป็นจุดใดๆ ใน D จึงได้ว่า $\sup f(D)$
เป็นขอบเขตล่าง ของ $g(D)$ โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์
จึงได้ว่า $\inf g(D)$ หาค่าได้ โดยที่

$$\sup f(D) \le \inf g(D)$$

$\square$