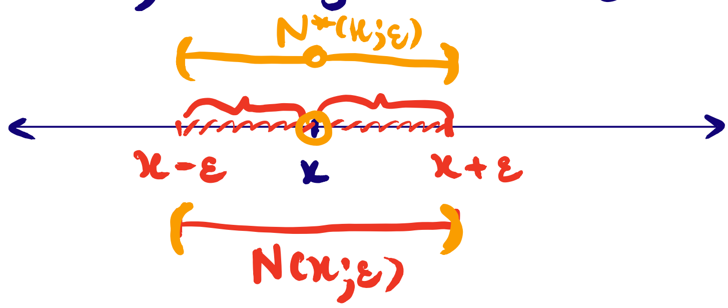
3.4 ทอพอโลยีของจำนวนจริง

บทนิยาม: ให้ $x \in \mathbb{R}$ และ $\varepsilon > 0$

(i) ย่านใกล้เคียง (neighborhood, nbhd) ของ x คือ เซต

$$N(x;\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon\}$$



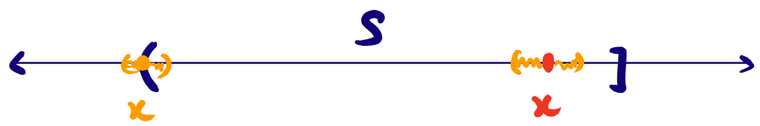
(ii) ย่านใกล้เคียงลบออก (deleted neighborhood) ของ x คือ

$$N^*(x;\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < |x-y| < \varepsilon\}$$

ข้อสังเกต! $N^*(x;\varepsilon) = N(x;\varepsilon) \setminus \{x\}$ (Why?)

บทนิยาม: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$

(i) เราจะเรียก x ว่า จุดภายใน (interior point) ของ S ถ้า มี nbhd N_x ที่ทำให้ $N_x \subseteq S$
และเขียนแทนเซตของจุดภายในทั้งหมด เป็น int S



(ii) เราจะเรียก x ว่า จุดขอบ (boundary point) ของ S ถ้า สำหรับทุก nbhd N_x, $N_x \cap S \neq \emptyset$ และ $N_x \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$ และเขียนแทนเซตของจุดขอบทั้งหมด เป็น $\text{bd}\, S$

<u>ตัวอย่าง</u> : ① $S = (0,1) \Rightarrow \text{int}\, S = (0,1)$

$\text{bd}\, S = \{0,1\}$

② $S = (-1,2) \cup (5,10) \Rightarrow \text{int}\, S = (-1,2) \cup (5,10)$
$\text{bd}\, S = \{-1,2,5,10\}$

③ $S = [3,4) \Rightarrow \text{int}\, S = (3,4)$
$\text{bd}\, S = \{3,4\}$

④ $S = \mathbb{R} \Rightarrow \text{int}\, S = \mathbb{R}$
$\text{bd}\, S = \emptyset$

<u>ทฤษฎีบท</u>: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ ถ้า $x \in S$ แล้ว $x \in \text{int}\, S$ หรือ $x \in \text{bd}\, S$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

<u>พิสูจน์</u>. สมมติให้ $x \in S$ และ $x \notin \text{bd}\, S$
[จะแสดงว่า $x \in \text{int}\, S \Leftrightarrow \exists N_x$ s.t. $N_x \subset S$]
[รู้! $x \in \text{bd}\, S \Leftrightarrow \forall N_x, N_x \cap S \neq \emptyset \wedge N_x \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$]

นั่นคือ จะมี nbhd N_x ที่ทำให้

$$N_x \cap S = \emptyset \text{ หรือ } N_x \cap (\mathbb{R}\setminus S) = \emptyset$$

เนื่องจาก $x \in S$ และเราทราบว่า $x \in N_x$ เสมอ
จึงได้ว่า $x \in N_x \cap S$ ส่งผลให้ $N_x \cap S \neq \emptyset$
ดังนั้น $N_x \cap (\mathbb{R}\setminus S) = \emptyset$
เพราะฉะนั้น $N_x \subseteq S$ จึงสรุปได้ว่า $x \in \operatorname{int} S$.

□

บทนิยาม: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$

(i) เราจะกล่าวว่า S เป็นเซตปิด (closed set) ถ้า $\operatorname{bd} S \subseteq S$

(ii) เราจะกล่าวว่า S เป็นเซตเปิด (open set) ถ้า $\operatorname{bd} S \subseteq \mathbb{R}\setminus S$

ทฤษฎีบท: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$

(i) S เป็นเซตเปิด $\Leftrightarrow$ $S = \operatorname{int} S$

(ii) S เป็นเซตปิด $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}\setminus S$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์. (i) ($\Rightarrow$) สมมติให้ S เป็นเซตเปิด
จึงได้ว่า $\operatorname{bd} S \subseteq \mathbb{R}\setminus S$
[จะแสดงว่า $S = \operatorname{int} S \Leftrightarrow S \subseteq \operatorname{int} S$ และ $\operatorname{int} S \subseteq S$]
($\subseteq$) [จะแสดงว่า $S \subseteq \operatorname{int} S$] ให้ $x \in S$
จาก $\operatorname{bd} S \subseteq \mathbb{R}\setminus S$ จึงได้ว่า $x \notin \operatorname{bd} S$

จากทฤษฎีบทก่อนหน้า จึงได้ว่า $x \in \text{int } S$

($\supseteq$) [จะแสดงว่า $\text{int } S \subseteq S$] ให้ $x \in \text{int } S$
นั่นคือ จะมี nbhd N_x ของ x ที่ทำให้ $x \in N_x \subseteq S$
เพราะฉะนั้น $S = \text{int } S$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $S = \text{int } S$
[จะแสดงว่า S เป็นเซตเปิด]
สมมติโดยแย้งให้ S เป็นเซตปิด จะได้ว่า

$$\text{bd } S \subseteq S = \text{int } S$$

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทก่อนหน้า จึงสรุปได้ว่า S เป็นเซตเปิด