บทนิยาม: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$

(i) เราจะกล่าวว่า $x \in \mathbb{R}$ เป็นจุดสะสม (accumulation point, cluster point, limit point) ของ S ถ้า ย่านรอบทุก dnbhd ของ x จะมีสมาชิกร่วมกับ S อย่างน้อยหนึ่งตัวเสมอ และเขียนแทนด้วย S'

$$\left[\, x \in S' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ N^{*}(x;\varepsilon) \cap S \neq \emptyset \,\right]$$

(ii) เราจะกล่าวว่า $x \in \mathbb{R}$ เป็นจุดโดดเดี่ยว (isolated point) ของ S ถ้า $x \notin S'$

และ

(iii) เราจะเรียกเซต $cl\, S = S \cup S'$ ว่าโคลเชอร์ (closure) ของ S

ทฤษฎีบท: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$x \in cl\, S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ N(x;\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$$

พิสูจน์ (ฝาก! ทุกคน)

ทฤษฎีบท: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$

(1) S เป็นเซตปิด $\Leftrightarrow S' \subseteq S$

(2) $cl\, S$ เป็นเซตปิด

(3) S เป็นเซตปิด $\Leftrightarrow S = cl\, S$

(4) $cl\, S = S \cup bd\, S$

พิสูจน์. (ฝาก!)

3.5 เซตกระชับ (Compact sets)

บทนิยาม: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$

เราจะกล่าวว่า เซต S มีขอบเขต (bounded) ถ้า $\exists M > 0$ s.t. $|x| \leq M$ สำหรับทุก $x \in S$

บทนิยาม: ให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ และ $\mathcal{O} = \{O_\lambda \subseteq \mathbb{R} : \lambda \in \Lambda\}$ เป็นวงศ์ของเซตเปิดใดๆ

(i) เราจะกล่าวว่า $\mathcal{O}$ เป็นตัวปกคลุมเปิด (open cover) ของ S ถ้า

$$S \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

(ii) ถ้า $\mathcal{O}$ เป็นตัวปกคลุมเปิด (open cover) ของ S แล้ว เราจะกล่าวว่า $\mathcal{S}$ เป็นตัวปกคลุมย่อย (subcover) ของ $\mathcal{O}$ ถ้า

① $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ และ ② $S \subseteq \bigcup\{O : O \in \mathcal{S}\}$

(iii) เราจะกล่าวว่า S เป็นเซตกระชับ (compact set) ถ้า สำหรับทุก open cover ของ S จะมี finite subcover

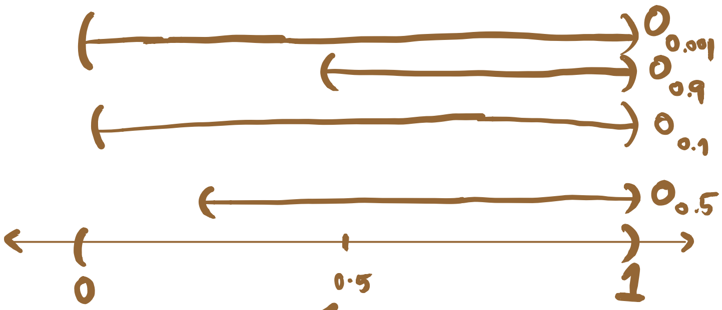
[every open cover of S has a finite subcover]

ตัวอย่าง: $(0,1)$

ให้ $x \in (0,1)$

กำหนด

$O_x = \left(\frac{x}{2}, 1\right)$ ดังนั้น



$\mathcal{O} = \{O_x : x \in (0,1)\}$ จะได้ว่า $\mathcal{O}$ เป็น open cover ของ $(0,1)$

พิจารณา ดวงส์ $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_n}\}$ ซึ่งเป็น finite subcover ของ $\mathcal{O}$

กำหนดให้ $x' = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ จะพบว่า $x' > 0$ และ:

$$O_{x_i} \subset O_{x'}$$

พิจารณา สำหรับ $0 < y < \frac{x'}{2}$ จะได้ว่า $y \notin O_{\frac{x'}{2}} \Rightarrow y \notin O_{x'}$

$$\Rightarrow y \notin \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$$

ดังนั้น $(0,1)$ ไม่เป็นเซตกะทัดรัด

② $[0,1]$

ให้ $\varepsilon > 0$ เพิ่มเติม $O_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$

และ $O_1 = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$\Rightarrow$ Is $\mathcal{O} = \{O_0, O_1, O_x : x \in (0,1)\}$ open cover of $(0,1)$?

$\Rightarrow$ Is $\{O_0, O_1, O_{x'}\}$ finite subcover of $\mathcal{O}$?