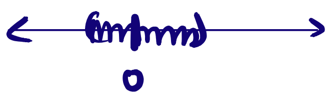
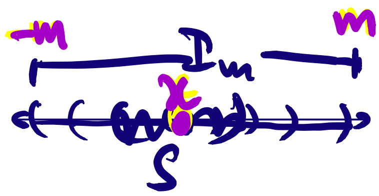
ทฤษฎีบท: ถ้า $S \subseteq \mathbb{R}$ เป็นเซต compact แล้ว S เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set)

พิสูจน์ ให้ $I_n := (-n,n)$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
เนื่องจาก I_n เป็นช่วงเปิด และ



$$S \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

นั่นคือ $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ เป็น open cover ของ S
เนื่องจาก S เป็น compact set จะมี finite subcover
$\{I_{n_1}, I_{n_2}, \dots, I_{n_k}\}$ ที่ทำให้



$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} I_{n_i}$$

ถ้า $m = \max\{n_i : i = 1,\dots,k\}$ จะได้ว่า

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} I_{n_i} = I_m$$

นั่นคือ $S \subseteq I_m = (-m,m)$
ดังนั้น สำหรับทุก $x \in S$ จะได้
$x \in (-m,m)$
$\rightarrow$ $-m < x \le m \Rightarrow |x| \le m$
เพราะฉะนั้น S เป็น bounded set.

$\square$

ทฤษฎีบท: ถ้า $S \subseteq \mathbb{R}$ เป็น compact set แล้ว S เป็น closed set

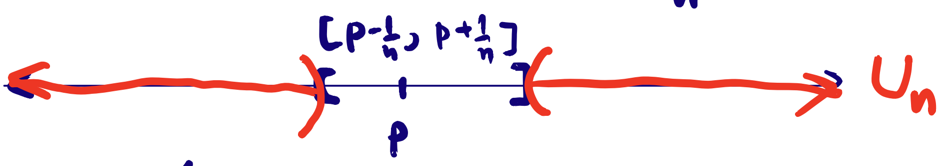
พิสูจน์ [รู้! S is closed $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cl}\,S \subseteq S$]

สมมติให้แย้งว่า S is not closed

นั่นคือ $\mathrm{cl}\,S \not\subseteq S$ ดังนั้นจะมี $p \in \mathrm{cl}\,S \setminus S$

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$$U_n := \mathbb{R} \setminus \left[p-\frac{1}{n}, p+\frac{1}{n}\right]$$



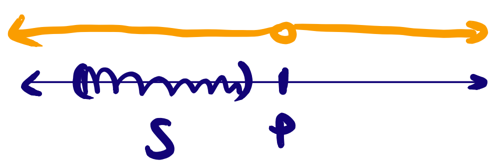
จะพบว่า U_n เป็นช่วงเปิด และ

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{R} \setminus \left[p-\frac{1}{n}, p+\frac{1}{n}\right]\right)$$

$$= \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[p-\frac{1}{n}, p+\frac{1}{n}\right]$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{p\}$$

เนื่องจาก $p \notin S$ นั่นคือ

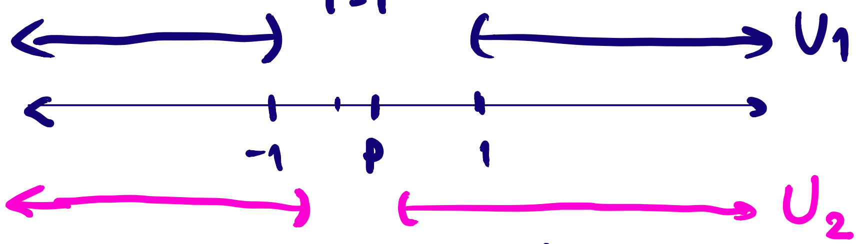


$$S \subseteq \mathbb{R} \setminus \{p\}$$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

นั่นคือ $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ จะเป็น open cover ของ S
เนื่องจาก S เป็น compact set จึงได้ว่า มี finite sub-cover $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}\}$ ที่ทำให้

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}$$

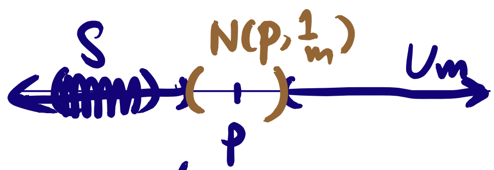


ถ้า $n_1 < n_2$ แล้ว $U_{n_1} \subseteq U_{n_2}$

กำหนดให้ $m = \max\{n_i : i = 1, \ldots, k\}$

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i} = U_m = \mathbb{R} \setminus [p-\tfrac{1}{m}, p+\tfrac{1}{m}]$$

นั่นคือ $S \cap N(p, \frac{1}{m}) = \emptyset$



ซึ่งทำให้ได้ว่า $S \cap N^*(p, \frac{1}{m}) = \emptyset$

นั่นคือ $p \notin S'$ และเพราะสมมุติว่า $p \notin S$

จึงได้ว่า $\quad cl\, S = S \cup S' \not\ni p$ ↯

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $cl\, S = S$ จึงสรุปได้ว่า S เป็น closed set $\square$