ตัวอย่าง (ยาก!) จงหาค่าของ $\int x^2 e^{-x}\,dx$

วิธีทำ $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

กำหนดให้ $u = x^2$ และ $dv = e^{-x}dx$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ และ $v = \int e^{-x}dx$

$= -e^{-x}$

ดังนั้น $\int x^2 e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} - \int (-e^{-x} 2x)dx$

$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}dx$

$u = x$ และ $dv = e^{-x}dx$

$\Rightarrow du = dx$ และ $v = -e^{-x}$

ดังนั้น

$\int x e^{-x}dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x})dx$

$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$

เพราะฉะนั้น

$\int x^2 e^{-x}dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}dx$

$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

□

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

วิธีทำ กำหนด $u = \cos 3x$ และ $dv = e^{2x}dx$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -3\sin 3x \quad \text{และ} \quad v = \int e^{2x}dx \qquad \left|\; u = 2x,\ \frac{du}{dx} = 2,\ dx = \frac{du}{2}\right.$$

$$= \int e^{u}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{e^{u}}{2} = \frac{e^{2x}}{2}$$

ดังนั้น

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\cos 3x - \int \frac{e^{2x}}{2}(-3\sin 3x)dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

กำหนด $u = \sin 3x$ และ $dv = e^{2x}dx$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 3\cos 3x \quad \text{และ} \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

ดังนั้น

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2}3\cos 3x\,dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

ดังนั้น $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \dfrac{e^{2x}\cos 3x}{2} + \dfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$$= \frac{e^{2x}\cos 3x}{2} + \frac{3}{2}\left[\frac{e^{2x}\sin 3x}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right]$$

$$= \frac{e^{2x}\cos 3x}{2} + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{4e^{2x}}{2\times 13}\cos 3x + \frac{4\times 3}{4\times 13}e^{2x}\sin 3x + C$$

$$= \frac{2e^{2x}}{13}\cos 3x + \frac{3e^{2x}}{13}\sin 3x + C$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \ln(x+x^2)\,dx$

วิธีทำ. กำหนดให้ $u = \ln(x+x^2)$ และ $dv = dx$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x+x^2}(1+2x)$ และ $v = x$

นั่นคือ $\int \ln(x+x^2)\,dx = x\ln(x+x^2) - \int \dfrac{x(1+2x)}{x+x^2}\,dx$

$$= x\ln(x+x^2) - \int \frac{1+2x}{1+x}\,dx$$

พิจารณา $\displaystyle\int \frac{1+2x}{1+x}\,dx = \int \frac{1+x+x}{1+x}\,dx$

$$= \int \frac{1+x}{1+x}\,dx + \int \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{x}{1+x}\,dx$$

$w = 1+x \Rightarrow x = w-1$

และ: $\dfrac{dw}{dx} = 1 \Rightarrow dw = dx$

$$= x + \int \frac{w-1}{w}\,dw$$

$$= x + \int \frac{w}{w}\,dw - \int \frac{1}{w}\,dw$$

$$= x + w - \ln|w| + C$$

$$= x + 1 + x - \ln|1+x| + C$$

$$= 1 + 2x - \ln|1+x| + C$$

ดังนั้น

$$\int \ln(x+x^2)\,dx = x\ln(x+x^2) - \int \frac{1+2x}{1+x}\,dx$$

$$= x\ln(x+x^2) - 1 - 2x + \ln|1+x| + C$$

$\square$

ฝาก! $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \sin(\ln x)\,dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = \sin(\ln x)$ และ $dv = dx$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \left(\cos(\ln x)\right)\dfrac{1}{x}$ และ $v = x$

นั่นคือ

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cos(\ln x)\,dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

พิจารณา $\int \cos(\ln x)\,dx$ ดังนี้

กำหนด $u = \cos(\ln x)$ และ $dv = dx$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \left(-\sin(\ln x)\right)\dfrac{1}{x}$ และ $v = x$

นั่นคือ

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\left(-\sin(\ln x)\right)dx$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$

ดังนั้น

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx + C$$

เพราะฉะนั้น

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x\sin(\ln x)}{2} - \frac{x\cos(\ln x)}{2} + C$$

$\square$

ฝึก! $\int z(\ln z)^2\,dz$

$$\int_{x=0}^{x=1} x\sqrt{1-x}\,dx$$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \sec^5 2x\,dx$

วิธีทำ. กำหนดให้ $u = \sec^3 2x$ และ $dv = \sec^2 2x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 6\sec^2 2x \sec 2x \tan 2x \qquad \text{และ } v = \int \sec^2 2x\,dx$$

$$= 6\sec^3 2x \tan 2x \qquad\qquad = \frac{\tan 2x}{2}$$

ดังนั้น

$$\int \sec^5 2x\,dx = \sec^3 2x \frac{\tan 2x}{2} - \int \left(\frac{\tan 2x}{2}\right) 6\sec^3 2x \tan 2x\,dx$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$= \frac{1}{2}\sec^3 2x \tan 2x - 3\int \tan^2 2x \sec^3 2x\,dx$$

$\Rightarrow$

$$\int \sec^5 2x\,dx = \frac{1}{2}\sec^3 2x \tan 2x - 3\int (\sec^2 2x - 1)\sec^3 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec^3 2x \tan 2x - 3\int \sec^5 2x\,dx + 3\int \sec^3 2x\,dx$$

$$\Rightarrow 4\int \sec^5 2x\,dx = \frac{\sec^3 2x \tan 2x}{2} + 3\int \sec^3 2x\,dx \quad (*)$$

พิจารณา $\int \sec^3 2x\,dx$ ดังนี้

กำหนดให้ $u = \sec 2x$ และ $dv = \sec^2 2x\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2\sec 2x \tan 2x$ และ $v = \dfrac{\tan 2x}{2}$

นั่นคือ $$\int \sec^3 2x\,dx = \frac{\sec 2x \tan 2x}{2} - \int \frac{(\tan 2x)}{2} 2\sec 2x \tan 2x\,dx$$

$$= \frac{\sec 2x \tan 2x}{2} - \int \tan^2 2x \sec 2x\,dx$$

$$= \frac{\sec 2x \tan 2x}{2} - \int (\sec^2 2x - 1)\sec 2x\,dx$$

$$= \frac{\sec 2x \tan 2x}{2} - \int \sec^3 2x + \int \sec 2x\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \sec^3 2x = \frac{\sec 2x \tan 2x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + C$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 2x = \frac{\sec 2x \tan 2x}{4} + \frac{1}{4}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + C$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \sec^5 2x = \frac{\sec^3 2x \tan 2x}{8} + \frac{3}{4}\int \sec^3 2x\,dx$$

$$= \frac{\sec^3 2x \tan 2x}{8} + \frac{3}{16}\sec 2x \tan 2x$$

$$+ \frac{3}{16}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + C \qquad \square$$

ฝาก! กำหนดให้ $n>0$ จงสร้างสูตรลดทอนสำหรับ

① $\int (\ln x)^n\,dx$

② $\int x^n \sin x\,dx$

③ $\int x^n e^{ax}\,dx \ ; a>0$

*** ④ $\int \cos^n x\,dx$