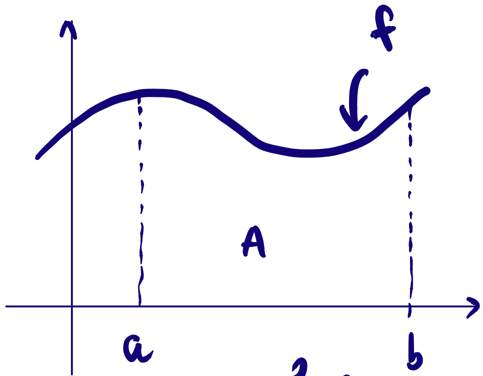
1.8 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

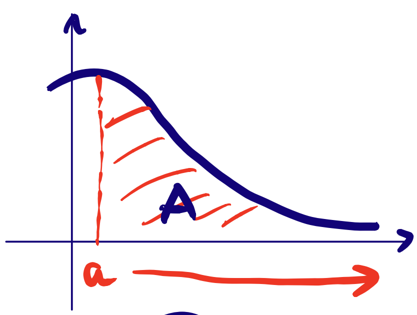


$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

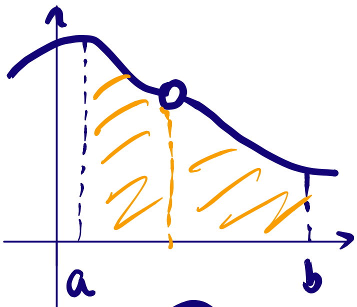
- $[a,b]$ เป็นช่วงปิด
- f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$
- ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสที่ 2

ถ้า $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน $[a,b]$ แล้ว

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



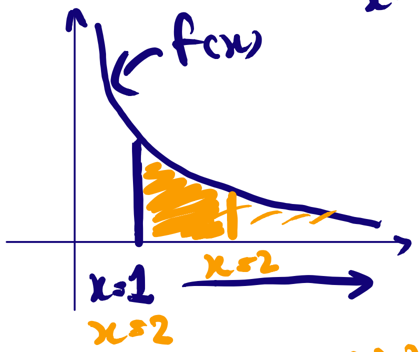
I

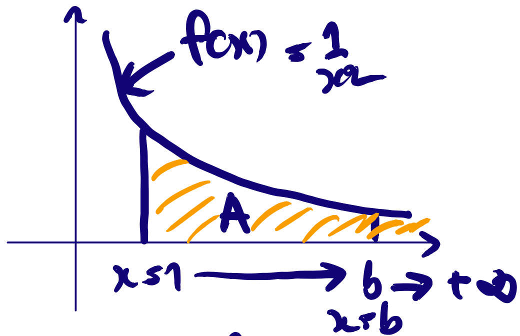


II

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ
Improper Integrals

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, +\infty)$
สมมติ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ จะได้พื้นที่ใต้กราฟบนช่วง $[1, +\infty)$





$$\int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Bigg|_{x=1}^{x=2}$$
$$= -\frac{1}{2} - (-1)$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$A = \lim_{b\to+\infty} \int_{x=1}^{x=b} \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\cancel{\frac{1}{b}}^{\,0} - (-1) \right)$$
$$= 1$$

จากการสังเกตข้างต้น เหตุนี้ นิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ชนิดที่ 1 ดังนี้

บทนิยาม:

(I) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, +\infty)$ เรานิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $[a, +\infty)$ เป็น

$$\int_{x=a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx$$

(II) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, b]$ เรานิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $(-\infty, b]$ เป็น

$$\int_{-\infty}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{x=t}^{x=b} f(x)\,dx$$

III ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, +\infty)$ เรานิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $(-\infty, +\infty)$ เป็น

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x=c} f(x)\,dx + \int_{x=c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

- ถ้า $\int_{-\infty}^{x=c} f(x)\,dx$ หรือ $\int_{x=c}^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก จะได้ว่า $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง: จงทดสอบการลู่เข้าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้

① $\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$

วิธีทำ พิจารณา $f(x) = \frac{1}{x^3}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[1, +\infty)$

จะได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ $\frac{1}{x^3}$ บนช่วง $[1, +\infty)$ เป็น

$$\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x^3}\,dx$$

พิจารณา $\displaystyle\int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\Big]_{x=1}^{x=t}$

$$= -\frac{1}{2t^2} - \left(-\frac{1}{2(1)^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ ลู่เข้าและมีค่าเป็น $\frac{1}{2}$

② $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

วิธีทำ. พิจารณาฟังก์ชัน $\frac{1}{x}$ บนช่วง $[1,+\infty)$ พบว่า

ฟังก์ชัน $\frac{1}{x}$ ต่อเนื่องบนช่วงนี้ จึงได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x}\,dx$$

พิจารณา $\displaystyle\int_{x=1}^{x=t}\frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big]_{x=1}^{x=t}$

$= \ln|t| - \ln|1| = \ln|t|$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{x=1}^{x=t}\frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle= \lim_{t\to+\infty}\left(\ln|t|\right) = +\infty$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออก

□

<u>ตัวอย่าง</u>: จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\displaystyle\int_{x=-1}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาฟังก์ชัน $\dfrac{x}{1+x^2}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,+\infty)$

จึงได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบคือ

$$\int_{x=-1}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{x=-1}^{x=t}\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

พิจารณา $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\,dx$ ดังนี้

กำหนดให้ $u = 1+x^2 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{u}\,\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u|+C$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$

นั่นคือ $\displaystyle\int_{x=-1}^{x=t} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\ln(1+(-1)^2)$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\ln 2$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_{x=-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_{x=-1}^{x=t} \frac{x}{1+x^2}\,dx\right)$

$\displaystyle= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\ln 2\right)$

$= +\infty$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_{x=-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ลู่ออก

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u>: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาฟังก์ชัน $\dfrac{e^x}{3-2e^x}$ หาค่าไม่ได้

ถ้า $3-2e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{2} > 0$

นั่นคือฟังก์ชัน $\dfrac{e^x}{3-2e^x}$ ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, 0]$

จะได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบคือ

$$\int_{-\infty}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{x=t}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$$

พิจารณา $\int \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$ ดังนี้

กำหนดให้ $u = 3-2e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2e^x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-2e^x}$$

นั่นคือ $\int \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx = \int \frac{\cancel{e^x}}{u} \frac{du}{(-2\cancel{e^x})} = -\frac{1}{2}\ln|u| + C$

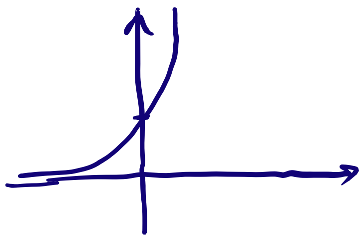
$$= -\frac{1}{2}\ln|3-2e^x| + C$$

ดังนั้น $\int_{x=t}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|3-2\cdot e^0| - \left(-\frac{1}{2}\ln|3-2e^t|\right)$

$$= -\frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln|3-2e^t|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|3-2e^t|$$

เพราะฉะนั้น $\int_{-\infty}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{x=t}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$



$$= \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{1}{2} \ln|3 - 2e^{t}| \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|3 - 2\lim_{t \to -\infty} e^{t}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \ln|3 - 2(0)| = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$= \ln\sqrt{3} \quad \square$$

ตัวอย่าง: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$

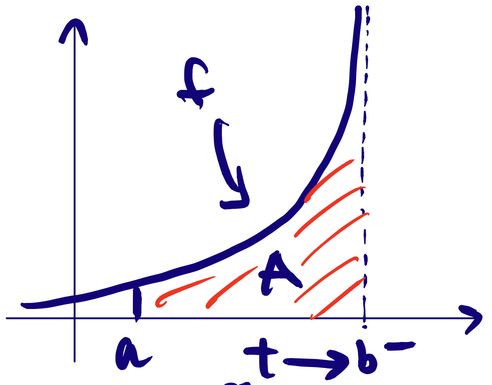
วิธีทำ พิจารณา $2xe^{-x^2} = \dfrac{2x}{e^{x^2}}$ ต่อเนื่องบน $(-\infty, +\infty)$

จึงได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบสอง

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{x=c} 2xe^{-x^2}\,dx + \int_{x=c}^{+\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_{x=t}^{x=c} 2xe^{-x^2}\,dx + \lim_{t \to +\infty} \int_{x=c}^{x=t} 2xe^{-x^2}\,dx$$

$$= \ldots = 0 \quad \square$$



การหาพื้นที่ใต้โค้ง f บนช่วง $[a,b]$ คือ

$$A = \lim_{t\to b^-}\int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx$$

จากการสังเกตข้างต้นนี้ เราสามารถนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 2 ได้ดังนี้

บทนิยาม: (I) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b)$ และไม่มีขอบเขตที่ $x=b$ เราจะนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $[a,b]$ โดย

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx$$

(II) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(a,b]$ และไม่มีขอบเขตที่ $x=a$ เราจะนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $[a,b]$ โดย

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{x=t}^{x=b} f(x)\,dx$$

(III) กำหนดให้ $c \in (a,b)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,c)$ และ $(c,b]$ และไม่มีขอบเขตที่ $x=c$ เราจะนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $[a,b]$ โดย

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx + \int_{x=c}^{x=b} f(x)\,dx$$

ตัวอย่าง: $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ บนช่วง $[0,1]$ จะพบว่า ฟังก์ชันนี้หาค่าไม่ได้ที่ $x=1$ จึงเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ดังนี้

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_{x=0}^{x=t} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

พิจารณา $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ ก่อน

กำหนดให้ $u = 1-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = (-du)$

จะได้ $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}(-du) = -\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$
$$= -2\sqrt{u} + C$$
$$= -2\sqrt{1-x} + C$$

ดังนั้น $$\int_{x=0}^{x=t} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x}\Big]_{x=0}^{x=t}$$

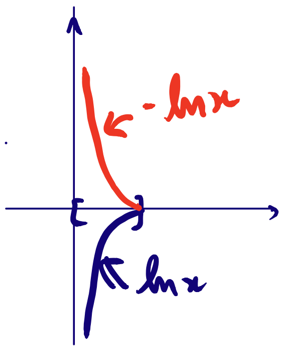
$$= -2\sqrt{1-t} + 2\sqrt{1-0}$$
$$= -2\sqrt{1-t} + 2$$

เพราะฉะนั้น $$\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_{x=0}^{x=t} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(-2\sqrt{1-t} + 2\right)$$
$$= 2$$

เพราะฉะนั้น $\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ ลู่เข้า และมีค่าเป็น 2 $\square$

ตัวอย่าง: $$\int_{x=0}^{x=1} (-\ln x)\,dx$$



วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $-\ln x$ บนช่วง $[0,1]$ พบว่า หาค่าไม่ได้ที่ $x=0$ จึงได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบคือ

$$\int_{x=0}^{x=1} (-\ln x)\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{x=t}^{x=1} (-\ln x)\,dx$$

พิจารณา $$\int (-\ln x)\,dx \overset{IBP?}{=} -(x\ln x - x) + C$$

ดังนั้น $$\int_{x=t}^{x=1} (-\ln x)\,dx = -x\ln x + x \Big]_{x=t}^{x=1}$$

$$= (-1\ln 1 + 1) - (-t\ln t + t)$$

$$= 1 + t\ln t - t$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} (-\ln x)\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{x=t}^{x=1} (-\ln x)\,dx$

$$= \lim_{t\to 0^+} (1 + t\ln t - t)$$

$$= 1 + \lim_{t\to 0^+} t\ln t - 0$$

พิจารณา $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} \quad \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1/t)}{(-1/t^2)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} (-\ln x)\,dx$ ลู่เข้า และมีค่าเป็น 1

$\square$

ตัวอย่าง: $\displaystyle\int_{x=0}^{x=3} \frac{dx}{x^2-x-2}$ $\qquad 0 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$\Rightarrow x = 2, -1$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $\dfrac{1}{x^2-x-2}$ บนช่วง $[0,3]$ จะพบว่า

ฟังก์ชันนี้หาค่าไม่ได้ที่ $x = 2, \cancel{-1}$

จะได้ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบคือ

$$\int_{x=0}^{x=3} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx + \int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \int_{x=0}^{x=t} \frac{dx}{x^2-x-2} + \lim_{t\to 2^+} \int_{x=t}^{x=3} \frac{dx}{x^2-x-2}$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u>: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-15}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาฟังก์ชัน $\dfrac{1}{x^2+2x-15}$ บนช่วง $(-\infty,+\infty)$

หาค่าไม่ได้เมื่อ $x^2+2x-15=0 \iff (x+5)(x-3)=0$

$\iff x = {}^{-}5, 3$

จะได้ช่วงการหาปริพันธ์เป็น

$$(-\infty, -5] \cup [-5, 3] \cup [3, +\infty)$$

$a<-5$ $\quad$ $-5<b<3$ $\quad$ $c>3$

โดยที่

ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-15} = \int_{-\infty}^{x=a} \frac{dx}{x^2+2x-15} + \int_{x=a}^{x=-5} \frac{dx}{x^2+2x-15} + \int_{x=-5}^{x=b} \frac{dx}{x^2+2x-15}$$

$$+\int_{x=b}^{x=3}\frac{dx}{x^2+2x-15}+\int_{x=3}^{x=c}\frac{dx}{x^2+2x-15}+\int_{x=c}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x-15}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\int_{x=t}^{x=a}\frac{dx}{x^2+2x-15}+\lim_{t\to-5^-}\int_{x=a}^{x=t}\frac{dx}{x^2+2x-15}$$

$$+\lim_{t\to-5^+}\int_{x=t}^{x=b}\frac{dx}{x^2+2x-15}+\lim_{t\to3^-}\int_{x=b}^{x=t}\frac{dx}{x^2+2x-15}$$

$$+\lim_{t\to3^+}\int_{x=t}^{x=c}\frac{dx}{x^2+2x-15}+\lim_{t\to+\infty}\int_{x=c}^{x=t}\frac{dx}{x^2+2x-15}$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u>: $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาฟังก์ชัน $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ บนช่วง $[0,+\infty)$

จะพบว่าจะหาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0, 1$

พิจารณาช่วงการหาปริพันธ์ดังนี้

$$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$$

$$=[0,a]\cup[a,1]\cup[1,b]\cup[b,+\infty)$$

ต.ย. ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบคือ

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx = \int_{x=0}^{x=a} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx + \int_{x=a}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$$

$$+ \int_{x=1}^{x=b} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx + \int_{x=b}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \int_{x=t}^{x=a} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx + \lim_{t\to 1^-} \int_{x=a}^{x=t} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$$

$$+ \lim_{t\to 1^+} \int_{x=t}^{x=b} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx + \lim_{t\to +\infty} \int_{x=b}^{x=t} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$$

D

<u>ฝาก!</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-9x^2}dx$