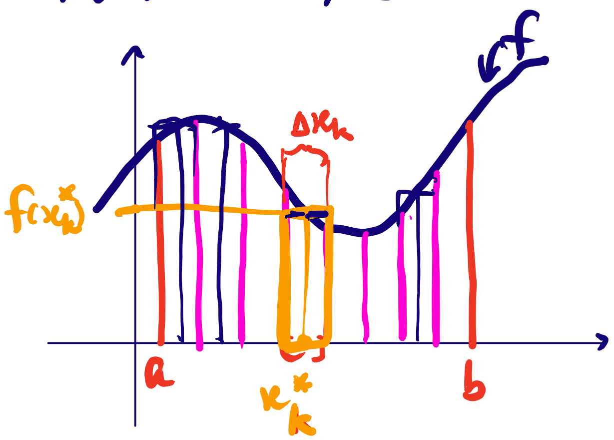
บทที่ 2

การประยุกต์การหาปริพันธ์

2.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ทบทวน! สมมติ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีค่าไม่เป็นลบบนช่วง $[a,b]$ เราสามารถหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งระหว่างช่วง $[a,b]$ ได้ดังนี้



① แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย

② สมมติว่าแต่ละช่วง k มีความกว้าง Δx_k จะพบว่า ถ้า x_k^* เป็นจุดใดๆ ในช่วงนี้ จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่ $f(x_k^*)\Delta x_k$

③ หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมทุกรูปมารวมกัน จะได้ผลบวกรีมันน์

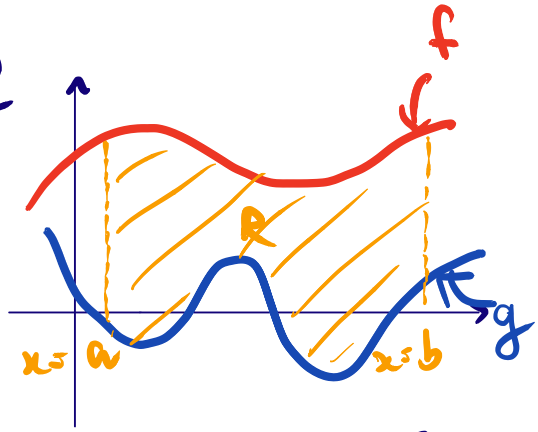
$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

④ สังเกตว่าถ้าเพิ่มความละเอียดของการแบ่งช่วง $\max \Delta x_k \to 0$ จะได้ว่า

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

หลักการ!

I



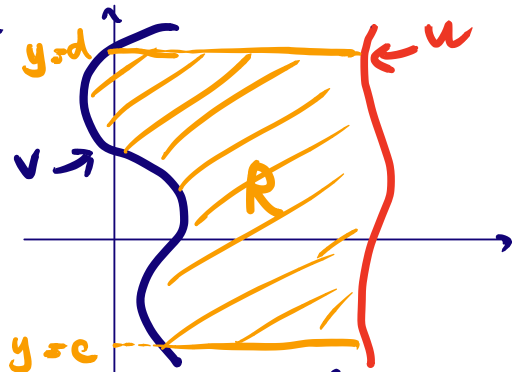
ถ้าฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยที่

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$$

แล้ว

$$A = \int_{x=a}^{x=b} [f(x)-g(x)]\,dx$$

II



ถ้าฟังก์ชัน u และ v เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[c,d]$ โดยที่

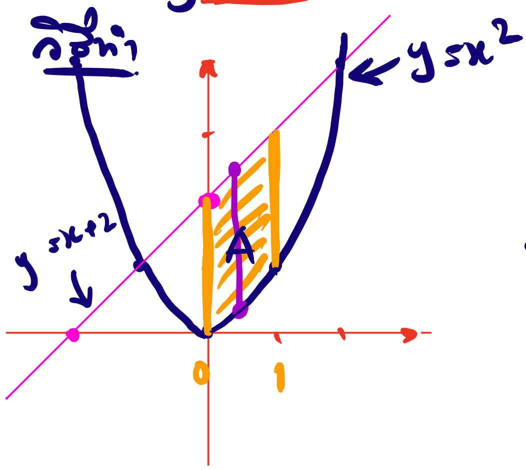
$$u(y) \geq v(y), \forall y \in [c,d]$$

แล้ว

$$A = \int_{y=c}^{y=d} [u(y)-v(y)]\,dy$$

ตัวอย่าง: จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2$ และ $y=x+2$ จาก $x=0$ ถึง $x=1$

วิธีทำ



สังเกตุ จะพบว่าฟังก์ชัน

$$x+2 \geq x^2 \text{ สำหรับทุก } x \in [0,1]$$

ดังนั้น จะได้ พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง คือ

$$A = \int_{x=0}^{x=1} [(x+2)-x^2]\,dx$$

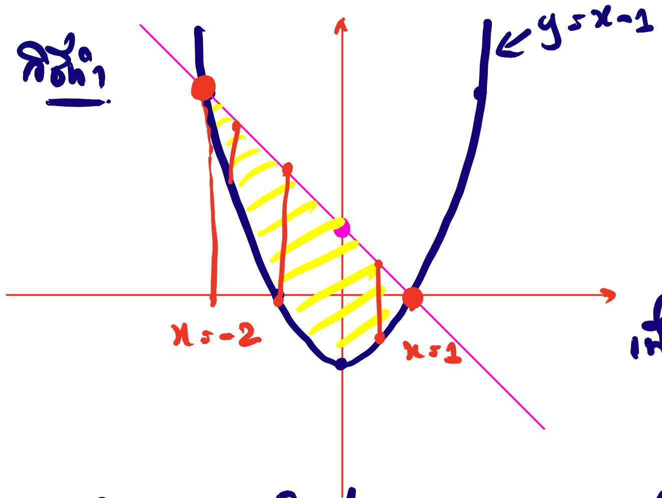
$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} - 0$$

$$= \frac{3+12-2}{6} = \frac{13}{6}$$ ตารางหน่วย □

ตัวอย่าง: จงหาพื้นที่ ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ และ $y = 1 - x$

กราฟ



จุดตัด: $y = y$

$$x^2 - 1 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2, 1$$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน

$1 - x \geq x^2 - 1$ สำหรับทุก $x \in [-2, 1]$

ดังนั้น จะได้พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง คือ

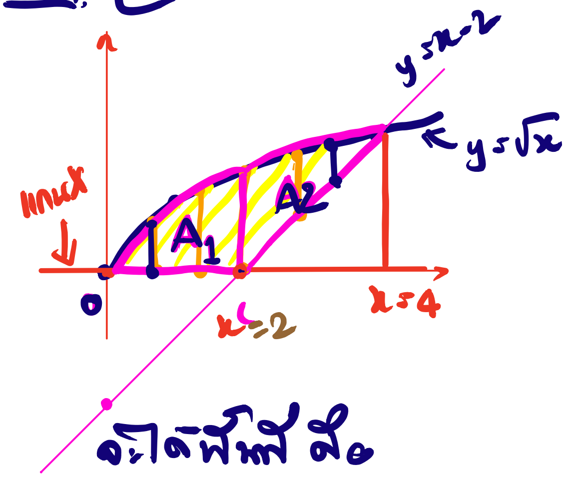
$$A = \int_{x=-2}^{x=1} \left[(1-x) - (x^2-1)\right] dx$$

$$= \dots = \frac{3}{2}$$ ตร.หน่วย

□

ตัวอย่าง: จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ และแกน X และเส้นตรง $y=x-2$

วิธีทำ ①



หาจุดตัด: $y=y$

$\sqrt{x} = x-2$

$\Rightarrow x = (x-2)^2 = x^2-4x+4$

$\Rightarrow x^2-5x+4 = 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 4$

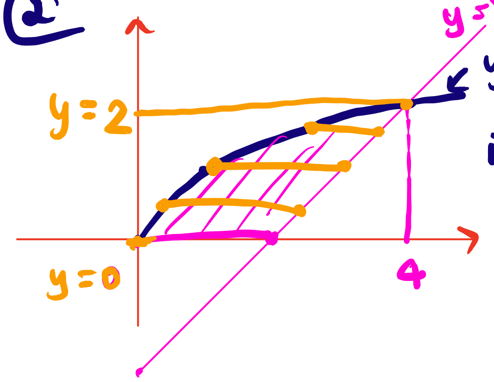
จะได้พื้นที่คือ

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} [\sqrt{x} - 0]\,dx + \int_{x=2}^{x=4} [\sqrt{x} - (x-2)]\,dx$$

$$= \cdots = \frac{10}{3} \text{ ตร.ห.}$$

②



$y=x-2 \Leftrightarrow x=y+2$

$y=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=y^2$

จะได้ พื้นที่

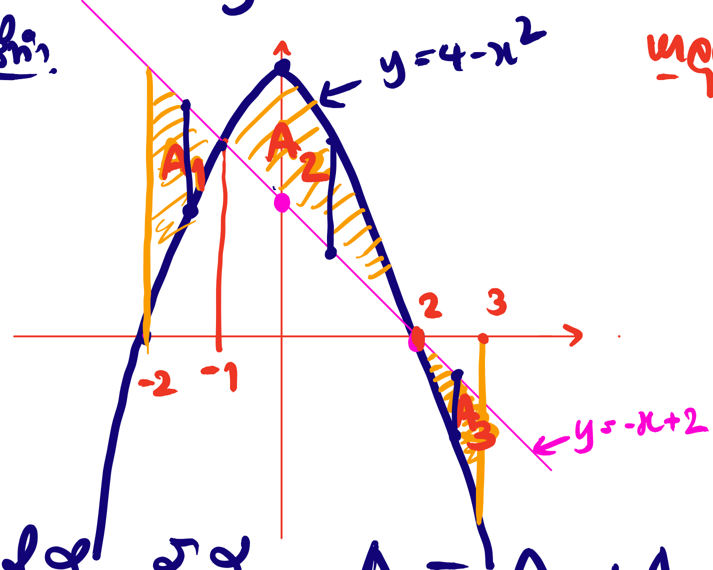
$$A = \int_{y=0}^{y=2} [(y+2)-y^2]\,dy$$

$$= \cdots = \frac{10}{3} \text{ ตร.ห.}$$

ฝาก! จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x+y=2$ และแกน X $\left(\frac{5}{6}\text{ ตร.น.}\right)$

ตัวอย่าง: จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=4-x^2$ และเส้นตรง $y=-x+2$ จาก $x=-2$ ถึง $x=3$

วิธีทำ



หาจุดตัด: $y=y$

$\Rightarrow 4-x^2 = -x+2$

$\Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\Rightarrow x=2,-1$

ที่ต้อง พื้นที่ $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$= \int_{x=-2}^{x=-1} \left[(-x+2)-(4-x^2)\right]dx$$

$$+ \int_{x=-1}^{x=2} \left[(4-x^2)-(-x+2)\right]dx$$

$$+ \int_{x=2}^{x=3} \left[(-x+2)-(4-x^2)\right]dx$$

$\square$

ฝาก! จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^2-4$,

$y = -x^2 - 2x$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 1$