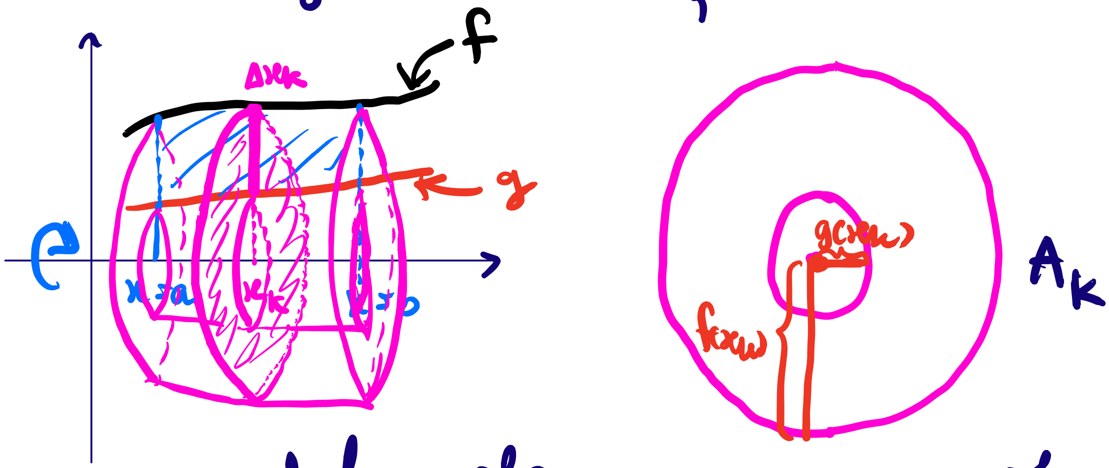
2.2 ปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ

2.2.1 การหาปริมาตรของทรงสามมิติของการหมุนบริเวณ โดยวิธีแผ่นกลม (Disk Method)

สมมติว่า f และ g ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$
และ $f(x) \geq g(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$



จะสามารถหาพื้นที่ A_k ที่เกิดจากการหมุน x_k ได้เป็น

$$A_k = \pi(f(x_k))^2 - \pi(g(x_k))^2$$

จะได้ปริมาตรของทรงกระบอก x_k เป็น

$$V_k = A_k \Delta x_k$$

$$= \pi[f^2(x_k) - g^2(x_k)]\Delta x_k$$

เมื่อสามารถประมาณค่าของปริมาตร

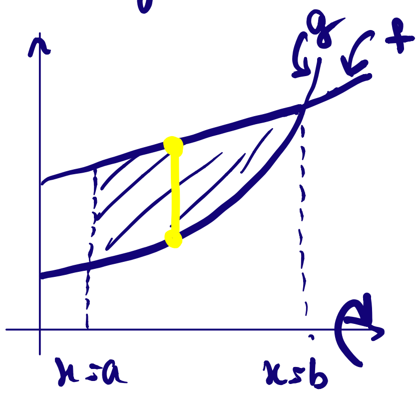
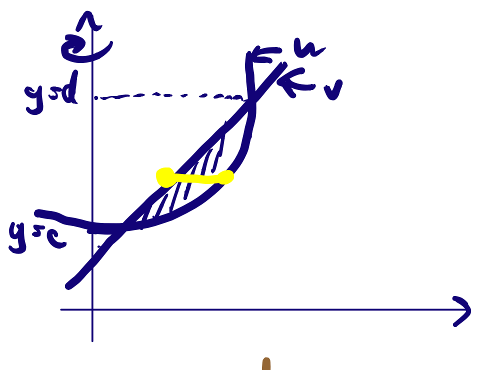
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi[f^2(x_k) - g^2(x_k)]\Delta x_k$$

จะได้ปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ ตั้งแต่ a ถึง b คือ

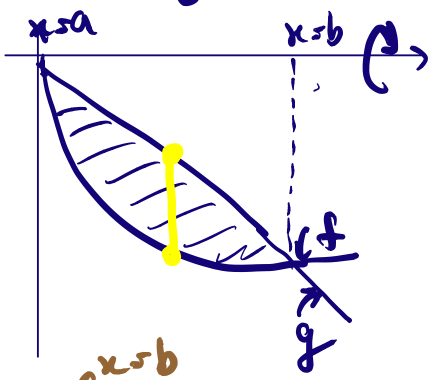
$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi[f^2(x_k) - g^2(x_k)]\Delta x_k$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \pi[f^2(x) - g^2(x)]\,dx$$

วิธีแหวนกลม : ลากเส้นตั้งฉากกับแกนหมุน

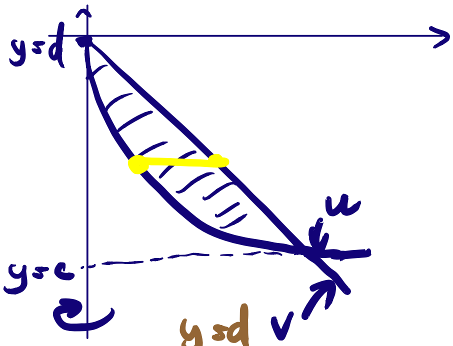
รอบแกน X	รอบแกน Y
① $f(x) \geq g(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in [a,b]$	② $u(y) \geq v(y) \geq 0$ สำหรับ $y \in [c,d]$
	
$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi[f^2(x) - g^2(x)]\,dx$	$V = \int_{y=c}^{y=d} \pi[u^2(y) - v^2(y)]\,dy$

III $f(x) \le g(x) \le 0$ และ $x \in [a,b]$



$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi[f^2(x) - g^2(x)]\,dx$$

IV $u(y) \le v(y) \le 0$ และ $y \in [c,d]$



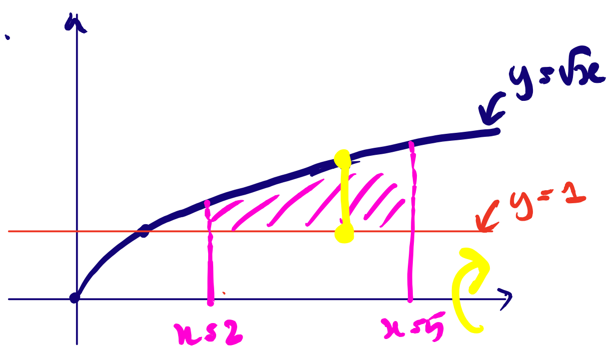
$$V = \int_{y=c}^{y=d} \pi[v^2(y) - u^2(y)]\,dy$$

ตัวอย่าง: จงหาปริมาตร V ของทรงตันสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ เส้นตรง $y=1$ จาก $x=2$ ถึง $x=5$

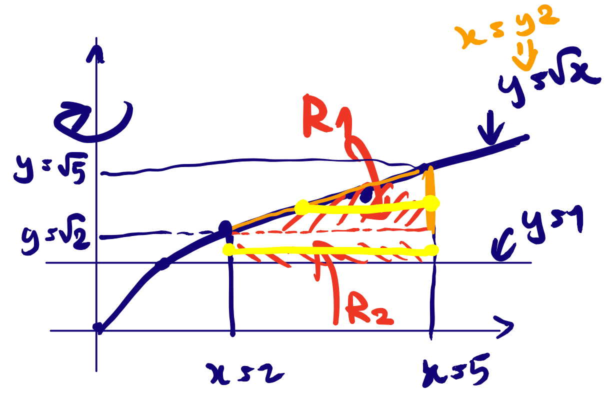
① รอบแกน X

② รอบแกน Y

วิธีทำ



$$V = \int_{x=2}^{x=5} \pi[(\sqrt{x})^2 - (1)^2]\,dx$$



$$V = V_1 + V_2$$

โดยที่

$$V_1 = \int_{y=\sqrt{2}}^{y=\sqrt{5}} \pi\left[5^2 - (y^2)^2\right] dy$$

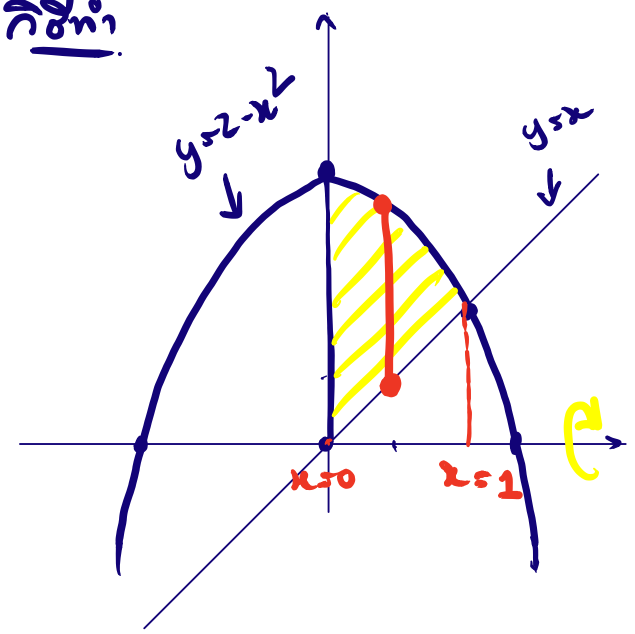
และ

$$V_2 = \int_{y=1}^{y=\sqrt{2}} \pi\left[5^2 - 2^2\right] dy$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ เส้นตรง $y = x$ แกน Y ในจตุภาคที่ 1 รอบแกน X

วิธีทำ



หาจุดตัด:

$$2 - x^2 = x$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, 1$$

จะได้

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \pi\left[(2-x^2)^2 - x^2\right] dx$$

ฝาก! หมุนรอบแกน Y ?

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาปริมาตร V ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x + 2$ และเส้นตรง $y = x + 4$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 2$ รอบแกน X

(ฝาก!)