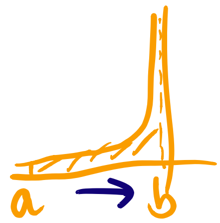
พิจารณา $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx \overset{?}{\Rightarrow}$

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 2

<u>บทนิยาม</u>:

(i) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b)$ และเป็นฟังก์ชันไม่มีขอบเขตที่ $x=b$ แล้ว ปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $[a,b]$ คือ

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx$$



(ii) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(a,b]$ และเป็นฟังก์ชันไม่มีขอบเขตที่ $x=a$ แล้ว ปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $[a,b]$ คือ

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{x=t}^{x=b} f(x)\,dx$$

(iii) ให้ $c \in (a,b)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,c)\cup(c,b]$ โดยที่ f ไม่มีขอบเขตที่ $x=c$ แล้ว ปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บน $[a,b]$ คือ

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx + \int_{x=c}^{x=b} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t \to c^-} \int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx + \lim_{t \to c^+} \int_{x=t}^{x=b} f(x)\,dx$$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงตรวจสอบการลู่เข้า $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ บนช่วง $[0,1]$

จะพบว่า $f(0)$ หาค่าไม่ได้ ✓

จึงได้ว่า

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_{x=t}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

พิจารณา $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

จะได้ว่า

$$\int_{x=t}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=t}^{x=1}$$

$$= -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{t}\right) = -1 + \frac{1}{t}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_{x=t}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{t}\right] = +\infty$$

ตัวอย่าง ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{ลู่ออก}$$

□

ตัวอย่าง: จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ บนช่วง $[0,1]$

จะพบว่า $f(1)$ หาค่าไม่ได้

จึงได้ว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_{x=0}^{x=t} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$= \cdots = 2$$

□

ตัวอย่าง: จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} (-\ln x)\,dx$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = -\ln x$ บนช

ช่วง $[0,1]$ จะพบว่า $f(0)$ หาไม่ได้
จึงได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ คือ

$$\int_{x=0}^{x=1} (-\ln x)\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_{x=t}^{x=1} (-\ln x)\,dx$$

$$= \dots = 1 \qquad \square$$

ตัวอย่าง: จงเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{x=0}^{x=3} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$ ในรูปของลิมิตโดยไม่ต้องคำนวณค่า

วิธีทำ พิจารณา $x^2-x-2=0 \iff (x-2)(x+1)=0$

$$\iff x = \boxed{2}, \cancel{-1}$$

ดังนั้น

$$\int_{x=0}^{x=3} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx + \int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$$

$$= \lim_{t \to 2^-} \int_{x=0}^{x=t} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx + \lim_{t \to 2^+} \int_{x=t}^{x=3} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$$

$\square$

ตัวอย่าง:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-15}$$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $\dfrac{1}{x^2+2x-15}$ หาค่าไม่ได้ที่

$$x^2+2x-15=0 \iff (x+5)(x-3)=0$$

$$\iff x=-5,3$$

จะต้องทำการแบ่งปริพันธ์(ในช่วง)

$$(-\infty,-5]\cup[-5,3]\cup[3,+\infty)$$

$$(-\infty,a]\cup[a,-5]\cup[-5,b]\cup[b,3]\cup[3,c]\cup[c,+\infty)$$

$a<-5$ $\quad -5<b<3 \quad$ $c>3$

เพราะฉะนั้น ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x-15}\,dx = \int_{-\infty}^{x=a}\frac{1}{x^2+2x-15}\,dx+\int_{x=a}^{x=-5}\frac{1}{x^2+2x-15}\,dx+\int_{x=-5}^{x=b}\frac{1}{x^2+2x-15}\,dx$$

$$+\int_{x=b}^{x=3}\frac{1}{x^2+2x-15}\,dx+\int_{x=3}^{x=c}\frac{1}{x^2+2x-15}\,dx+\int_{x=c}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x-15}\,dx$$

$\square$

ตัวอย่าง: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-9x^2}\,dx$$ (ฝาก!)

ตัวอย่าง: $$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$$