การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชัน	การแทนค่า	ขอบเขต
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$	$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta$	$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\underline{\underline{\sec}}\theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$; $x \geq a$ $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$; $x \leq -a$

หลักการหาปริพันธ์มีดังนี้

1. จัดรูปฟังก์ชัน (x) ให้ตรงตามรูปแบบในตาราง
2. กำหนดให้ $x = a\boxed{}\theta$ และระบุขอบเขตของ θ ตามตาราง
3. แทนค่า (x) ให้อยู่ในรูป (θ) และหา dx
4. อินทิเกรตเทียบ θ และแทนค่า x กลับคืนโดยใช้รูปสามเหลี่ยมอ้างอิง

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{2^2+x^2}$$

กำหนดให้ $x = a\tan\theta$

$\Rightarrow x = 2\tan\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ②

พิจารณา

$$\sqrt{2^2+x^2} = \sqrt{2^2+(2\tan\theta)^2}$$

$$= \sqrt{2^2(1+\tan^2\theta)}$$

$$= \sqrt{2^2\sec^2\theta}$$

$$= 2\sec\theta$$

③ $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\Rightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

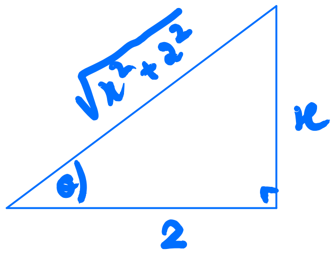
แล้วหา dx ได้

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d[2\tan\theta]}{d\theta} = 2\sec^2\theta \Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cancel{2\sec\theta}}\,\cancel{2}\sec^{\cancel{2}}\theta\, d\theta$$

$x = 2\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{2}$



$$= \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

④

□

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

วิธีทำ. (I) พยายามจัดรูปให้อยู่ในรูปตามตาราง

พิจารณา $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$

(II) กำหนดให้

$x = 3\sin\theta$ โดยที่ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(III) จะได้

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$$= \sqrt{3^2-(3\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{3^2(1-\sin^2\theta)}$$

$$= \sqrt{3^2\cos^2\theta} = 3\cos\theta$$

และ หา dx โดย

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d[3\sin\theta]}{d\theta} = 3\cos\theta$$

$$\Rightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

(IV) แทนค่าจะเป็น

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cancel{3\cos\theta}}\,\cancel{3\cos\theta}\,d\theta = \int 1\,d\theta$$

$$= \theta + C$$

$x = 3\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$

$$= \arcsin\frac{x}{3} + C$$

$\square$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $x > \frac{2}{5}$ จงหาค่าของ

$$\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-4}}\,dx$$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2-\frac{4}{25}\right)}$

$$= 5\sqrt{x^2-\frac{4}{25}} = 5\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

กำหนดให้ $x = \frac{2}{5}\sec\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

จะได้ว่า

$$\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\sec\theta\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\sec^2\theta-1\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2\tan^2\theta} = \frac{2}{5}\tan\theta$$

$\frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow t^2 + 1 = \sec^2_\theta$

$\Rightarrow \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

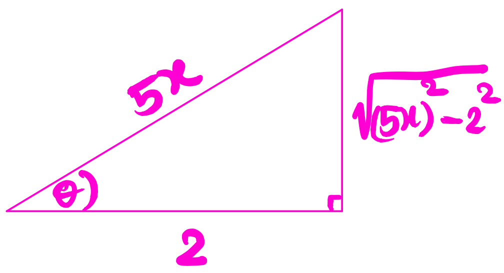
และ: $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{2}{5}\sec\theta\right] = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{5\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}}\,dx$

$x = \frac{2}{5}\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{5x}{2}$

$$= \int \frac{1}{5\cdot\cancel{\frac{2}{5}}\cancel{\tan\theta}}\left(\cancel{\frac{2}{5}}\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}\right)d\theta$$



$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\ln|\sec\theta+\tan\theta|$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2}+\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C \quad \square$$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx$

วิธีทำ. พิจารณา

$(x-a)^2 = x^2-2xa+a^2$

$(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$

$x^2-2x+10 = x^2-2x(1)+1^2-1^2+10$

$$= (x-1)^2-1+10$$

$$= (x-1)^2 + 9$$

$$= (x-1)^2 + 3^2$$

กำหนด

$x - 1 = 3\tan\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

สังเกตว่า

$$x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 3^2$$

$$= (3\tan\theta)^2 + 3^2$$

$$= 3^2(\tan^2\theta + 1) = 3^2\sec^2\theta$$

จาก $x - 1 = 3\tan\theta$

$\Rightarrow x = 3\tan\theta + 1 \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 3\sec^2\theta$

$\Rightarrow dx = 3\sec^2\theta \, d\theta$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 2x + 10}\,dx = \int \frac{1}{3^{\cancel{2}}\cancel{\sec^2\theta}}(\cancel{3}\cancel{\sec^2\theta})\,d\theta$

$$= \frac{1}{3}\int 1\,d\theta = \frac{\theta}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

$x - 1 = 3\tan\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{x-1}{3}$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\,dx$

วิธีทำ. พิจารณา

$$x^2-4x+8 = x^2-2x(2)+2^2-2^2+8$$

$$= (x-2)^2-4+8$$

$$= (x-2)^2+4 = (x-2)^2+2^2$$

กำหนดให้ $x-2 = 2\tan\theta$ โดยที่ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

จะได้ว่า

$$x^2-4x+8 = (x-2)^2+2^2$$

$$= (2\tan\theta)^2+2^2 = 4(\tan^2\theta+1)$$

$$= 4\sec^2\theta$$

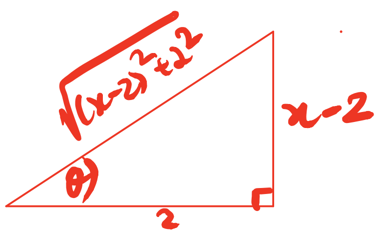
และ จาก $x-2 = 2\tan\theta$

$$\Rightarrow x = 2\tan\theta+2 \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2\sec^2\theta$$

$$\Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$$

เพราะฉะนั้น $$\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{\cancel{2}\tan\theta+\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}\cancel{\sec^2\theta}}(\cancel{2}\cancel{\sec^2\theta})\,d\theta$$

$x-2 = 2\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{x-2}{2}$



$$= \int (\tan\theta+1)\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta| + \theta + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{(x-2)^2+2^2}}{2}\right| + \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

$+ C$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4x+8}}{2}\right| + \arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

$+ C$

D