1.6 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเศษส่วนย่อย

พิจารณาฟังก์ชัน

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} \overset{?}{=} \frac{A^{?}}{x-3} + \frac{B^{?}}{x+1}$$

ในกรณีทั่วไป ถ้าฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ใดๆ เราสามารถทำ

การแยกเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

(1) Check! ว่าเป็นเศษส่วนแท้

ตรวจสอบ! $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$?

$\deg(5x-3) = 1$ และ $\deg(x^2-2x-3) = 2$

ถ้า $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ แล้วไป(2)

ถ้า $\deg(P(x)) > \deg(Q(x))$ แล้วให้ตั้งหารยาว

แล้วจึงไปขั้นตอน(2)

(2) ทำการแยกตัวประกอบของ $Q(x)$ จนกว่าจะแยกไม่ได้

$[(x-a), (x-a)^m, (ax^2+bx+c)^m$

(3) ทำการกำหนดรูปแบบเศษส่วนย่อยดังนี้

กรณีที่ 1: ถ้าตัวประกอบ $Q(x)$ มีพจน์

$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)$

ให้กำหนดรูปแบบของเศษส่วนย่อยเป็น

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

กรณีที่ 2: ถ้าตัวประกอบ $Q(x)$ มีพจน์ $(x-a)^n$
จะต้องกำหนดรูปแบบของเศษส่วนย่อยเป็น

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

กรณีที่ 3: ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ มีพจน์ $(ax^2+bx+c)^m$ ให้กำหนดรูปแบบเศษส่วนย่อยเป็น

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

(4) ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของเศษส่วนย่อย

ตัวอย่าง: จงใช้การแยกเศษส่วนย่อยหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4}\,dx$$

วิธีทำ ① Check! เศษส่วนแท้ ✓

$$\deg(5x-10)=1 \quad < \quad 2=\deg(x^2-3x-4)$$

ซึ่งเป็นเศษส่วนแท้ ✓

② แยกตัวประกอบของ x^2-3x-4

จะได้ว่า $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$

③ กำหนดเศษส่วนย่อยดังนี้

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}=\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x+1} \longleftarrow$$

$$= \frac{A_1(x+1)}{(x-4)(x+1)} + \frac{A_2(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{A_1(x+1) + A_2(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{A_1x + A_1 + A_2x - 4A_2}{x^2-3x-4}$$

$$\Rightarrow \frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{(A_1+A_2)x + (A_1-4A_2)}{x^2-3x-4}$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\left.\begin{array}{l} ① - \quad A_1 + A_2 = 5 \\ ② - \quad A_1 - 4A_2 = -10 \end{array}\right\} ① - ② ; \quad \cancel{A_1} + A_2 - \cancel{A_1} + 4A_2 = 5 - (-10)$$

$$\Rightarrow \quad 5A_2 = 15$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_2 = 3}$$

$$\Rightarrow A_1 + 3 = 5 \Rightarrow \boxed{A_1 = 2}$$

ดังนั้น $\dfrac{5x-10}{x^2-3x-4} = \dfrac{2}{x-4} + \dfrac{3}{x+1}$

นั่นคือ

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4}\,dx = \int \frac{2}{x-4}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x-4}\,dx + 3\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x-4| + 3\ln|x+1| + c$$

$$= \ln(x-4)^2 + \ln|x+1|^3 + c$$

$$= \ln(x-4)^2|x+1|^3 + c$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> : จงหาค่าของ $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$\deg(2x+4) = 1 \quad < \quad 3 = \deg(x^3-2x^2)$$

พิจารณาตัวประกอบของ $x^3-2x^2 = x^2(x-2)$
ซึ่งถ้าหาเศษส่วนย่อย เป็น

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{2x+4}{x^2(x-2)}$$

$$= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-2}$$

$$= \frac{A_1x(x-2)}{x^2(x-2)} + \frac{A_2(x-2)}{x^2(x-2)} + \frac{A_3x^2}{x^2(x-2)}$$

$\Rightarrow$

$$2x+4 = A_1x(x-2) + A_2(x-2) + A_3x^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x+4 = A_1x^2 - 2A_1x + A_2x - 2A_2 + A_3x^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x+4 = (A_1+A_3)x^2 + (-2A_1+A_2)x - 2A_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0 \\ -2A_1 + A_2 &= 2 \\ -2A_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &-2 + A_3 = 0 \Rightarrow \boxed{A_3 = 2} \\ &-2A_1 - 2 = 2 \Rightarrow A_1 = \frac{4}{-2} \\ &A_2 = -2 \qquad \Rightarrow \boxed{A_1 = -2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{2x+4}{x^3-2x^2} = \dfrac{-2}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x-2}$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -2\ln|x| - 2\left(-\frac{1}{x}\right) + 2\ln|x-2| + C$$

$$= \frac{2}{x} + \ln\frac{(x-2)^2}{x^2} + C$$

$\square$

ข้อฝาก : จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 1}{x^2 - 2x - 3}\,dx$

(ฝาก!)

ตัวอย่าง. จงหาค่าของ $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$

(ฝาก!)

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta + 1}$

(ฝาก!)