การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน
(Integration by Part)

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

ตัวอย่าง : $f(x) = x \Rightarrow f(x)g(x) = x^2$

$$\Rightarrow \int f(x)g(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

แต่ $\int f(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ และ $\int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ $\neq$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

จะได้ $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

กำหนดให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ จะได้

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = f'(x)$ และ $\frac{dv}{dx} = g'(x)$

$\Rightarrow \quad du = f'(x)dx$ และ $dv = g'(x)dx$

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\Rightarrow \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{IBP}$$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int xe^x dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = e^x$ และ $dv = x\,dx$

สูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

จาก $du = \frac{d}{dx}e^x = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

และ $dv = x\,dx \Rightarrow \int dv = \int x\,dx$

$$\Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

เพราะว่า

$$\int xe^x dx = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx \quad ?$$

กำหนดให้ $u = x$ และ $dv = e^x dx$

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{du = dx}$

และ $\int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$

ดังนั้น
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$

□

ตัวอย่าง 2: จงหาค่าของ $\int x\cos x\, dx$

วิธีทำ สูตร! $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

กำหนดให้ $u = x$ และ $dv = \cos x\, dx$

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1$ และ $\int dv = \int \cos x\, dx$

$\Rightarrow \quad du = dx$ และ $v = \sin x$

ดังนั้น $\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$

$= x\sin x - (-\cos x) + C$

$= x\sin x + \cos x + C$

D

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \ln x\,dx$ เมื่อ $x > 0$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = \ln x$ และ $dv = dx$

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ และ $\int dv = \int dx$

$\Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$ และ $v = x$

ดังนั้น $\int \ln x\,dx = \int u\,dv$

$= uv - \int v\,du$

$= x\ln x - \int x\frac{dx}{x}$

$= x\ln x - \int 1\,dx$

$= x\ln x - x + C$

D

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int x^2 e^{-x}\,dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = e^{-x}$ และ $dv = x^2dx$

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -e^{-x}$ และ $v = \int x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3}$

ดังนั้น $\int x^2 e^{-x} dx = e^{-x}\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}(-e^{-x})dx$

$= \frac{x^3 e^{-x}}{3} + \int \frac{x^3 e^{-x}}{3} dx$ — ?

กำหนดให้ $u = x^2$ และ $dv = e^{-x}dx$

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x$ และ $\int dv = \int e^{-x}dx$

$\Rightarrow \quad du = 2x\,dx$ และ $v = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$

ดังนั้น $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - \int (-e^{-x}) 2x\,dx$

$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$ //

$u = x$ และ $dv = e^{-x}dx$

$\Rightarrow du = dx$ และ $v = -e^{-x}$

ดังนั้น $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int (-e^{-x})\,dx$

$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$

$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$

ตัวอย่าง $\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$

$= -x^2e^{-x} + 2[-xe^{-x} - e^{-x}] + C$

$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$ □

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int \sin(\ln x)\,dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = \sin(\ln x)$ และ $dv = dx$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$ และ $\int dv = \int dx$

$\Rightarrow du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ และ $v = x$

ดังนั้น $\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int x\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$

กำหนดให้

$u = \cos(\ln x)$ และ $dv = dx$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$ และ $\int dv = \int dx$

$\Rightarrow du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$ และ $v = x$

ดังนั้น $\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) - \int x\left(-\frac{1}{x}\right)\sin(\ln x)dx$

$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$

ดังนั้น $\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$

$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

$- \int \sin(\ln x)dx + C$

$\Rightarrow 2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + C$

$\Rightarrow \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) + C$

□

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\int e^{2x}\cos x\,dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u = e^{2x}$ และ $dv = \cos x\,dx$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2e^{2x}$ และ $\int dv = \int \cos x\,dx$

$\Rightarrow du = 2e^{2x}dx$ และ $v = \sin x$

ให้ $I = \int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x - \int (\sin x)(2e^{2x})\,dx$

$= e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx$

กำหนดให้ $u = e^{2x}$ และ $dv = \sin x\,dx$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2e^{2x}$ และ $\int dv = \int \sin x\,dx$

$\Rightarrow du = 2e^{2x}dx$ และ $v = -\cos x$

ให้ $J = \int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x - \int (-\cos x)(2e^{2x})\,dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx$

ดังนั้น $I = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx$

$= e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx\right] + C$

$= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,dx + C$

$\Rightarrow 5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + C$

$\Rightarrow \int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{2x}}{5}\sin x + \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + C$ □

ฝึกหัด!

① $\int \ln(1+x^2)\,dx$ $\quad u = \ln(1+x^2)\ ;\ dv = dx$

② $\int \sec^3 2x\,dx$ $\quad u = \sec 2x;\ dv = \sec^2 2x\,dx$

③ ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาค่าของ

$$\int (\ln x)^n dx \quad \left[x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx\right]$$