1.8 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad ; \quad [a,b]$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ต่อเนื่อง บน $[a,b]$

$$\to \int_{x=a}^{+\infty} f(x)\,dx \,, \quad \int_{-\infty}^{x=b} f(x)\,dx \,, \quad \int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x^2}\,dx \Leftarrow$$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 :

I ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,+\infty)$ แล้ว

$$\int_{x=a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx$$

II ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty,b]$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{x=t}^{x=b} f(x)\,dx$$

III ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty,+\infty)$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x=c} f(x)\,dx + \int_{x=c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_{x=t}^{x=c} f(x)\,dx + \lim_{t \to +\infty} \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

- ถ้าลิมิตหาค่าได้ แล้ว เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ลู่เข้า
- ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ แล้ว เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ลู่ออก

ตัวอย่าง : $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[1, +\infty)$

จะได้ว่า $$\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x^2}\,dx$$

พิจารณา $$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

ดังนั้น $$\int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \left(-\frac{1}{t}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{t} + 1$$

ดังนั้น $$\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{x=1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\underbrace{-\frac{1}{t}}_{\to 0} + 1\right] = 1$$

สรุปได้ว่า $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ลู่เข้า และมีค่าเท่ากับ 1 $\square$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> สังเกตฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ ต่อเนื่องบน $[1,+\infty)$

จะได้ว่า

$$\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x}\,dx$$

พิจารณา

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{x=1}^{x=t} = \ln|t| - \ln|1|$$

$$= \ln t - \ln 1$$

$$= \ln t$$

ดังนั้น

$$\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (\ln t) = +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ ลู่ออก $\square$

ตัวอย่าง: $\displaystyle\int_{x=-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $\frac{x}{1+x^2}$ หาค่าได้และต่อเนื่องบน $[-1,+\infty)$

จะได้ว่า $\displaystyle\int_{x=-1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{x=-1}^{x=t} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ $[u=1+x^2]$

$= \dots = +\infty$

$\Rightarrow$ ลู่ออก.

ตัวอย่าง: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{x=t}^{x=0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$

$= \dots = \frac{\ln 3}{2}$ $[u=3-2e^x]$

ตัวอย่าง: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx$

วิธีทำ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{x=0} x e^{-x^2}\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{x=0}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx}_{②}$

พิจารณา $\displaystyle\int_{-\infty}^{x=0} x e^{-x^2}\,dx$;

กำหนดให้ $u=-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{(-2x)}$

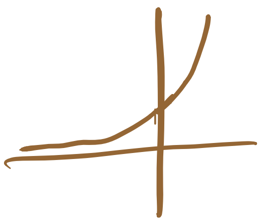
หาก่อน $\int x e^{-x^2} dx = \int x e^{u} \frac{du}{(-2x)} = -\frac{1}{2}\int e^{u} du = -\frac{e^{u}}{2} + C$

$= -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$

จะได้ $\int_{-\infty}^{x=0} x e^{-x^2} dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{x=t}^{x=0} x e^{-x^2} dx$

$= \lim_{t \to -\infty} \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{x=t}^{x=0}$

$= \lim_{t \to -\infty} \left(-\frac{e^{0}}{2} - \left(-\frac{e^{-t^2}}{2} \right) \right)$



$= \lim_{t \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{-t^2}}{2} \right)$

$= \lim_{t \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2e^{t^2}}}^{\,0} \right) = -\frac{1}{2}$

และ $\int_{x=0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=t} \right)$

$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} + \frac{e^{0}}{2} \right]$

$= \lim \left[-\cancel{\frac{1}{2e^{t^2}}}^{\,0} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$

$+ = 0$