บทที่ 3
อนุพันธ์ย่อย

3.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ตัวอย่าง

$$f(x,y) = x^2+y^2 \Rightarrow f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(r,h) = 2\pi r h$$

$$f(x,y,z) = xyz \Rightarrow f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$f(x,y)$ $\qquad$ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

(x,y) $\qquad$ $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$\uparrow$ คู่อันดับ $\qquad$ $\uparrow$ n สิ่งอันดับ

ตัวอย่าง: $f(x,y) = \sqrt{y-x+1}$ จงหาค่าของ $f(3,2)$ และ D_f

วิธีทำ $f(3,2) = \sqrt{2-3+1} = \sqrt{0} = 0$

$$f(y,x) = \sqrt{x-y+1}$$

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x+1 \geq 0\}$$

ตัวอย่าง: จงหาโดเมน ของ $f(x,y) = \ln xy$ และ $g(x,y) = \ln x + \ln y$

วิธีทำ $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0$ และ $y>0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0$ และ $y<0\}$

$D_g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0$ และ $y>0\}$

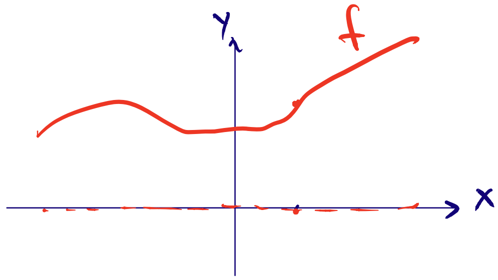
<u>ตัวอย่าง</u>: กำหนดให้ $f(x,y) = x + \sqrt[3]{xy}$ สำหรับทุก $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
จงหาค่าของ

(1) $f(t,t^2)$
(2) $f(2y^2,4y)$
(3) $f(9y,x^2)$

(ฝาก!)

3.2 กราฟของฟังก์ชันหลายตัวแปร

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

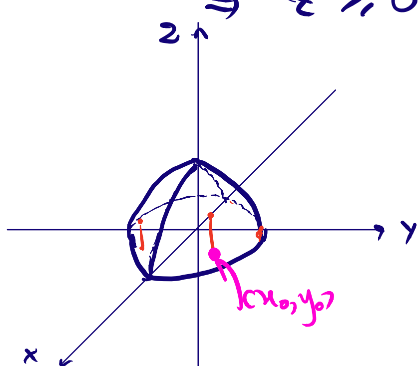


$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
ถ้า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร
เรานิยามกราฟของฟังก์ชัน $f(x,y)$
ในระบบ xyz เป็นกราฟของ
$z = f(x,y)$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

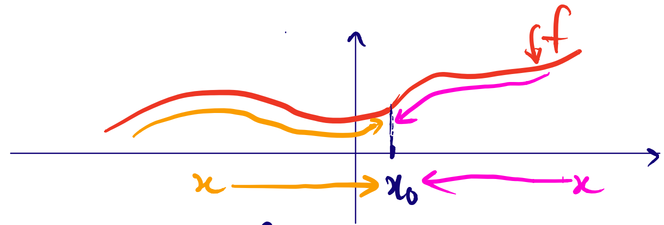
<u>วิธีทำ</u> พิจารณา กราฟของฟังก์ชัน $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$
คือกราฟของ $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$\Rightarrow z \geq 0$ และ $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$
" $z^2 = 1-x^2-y^2$
" $x^2+y^2+z^2 = 1$



3.4 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร

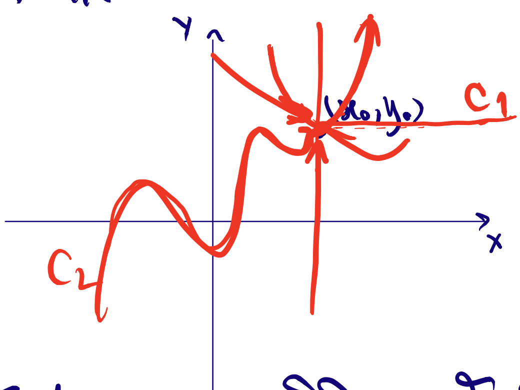
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$$

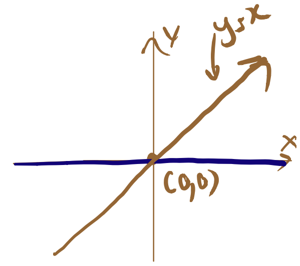
ตามแนวเส้นโค้ง C

ตัวอย่าง: จงหาลิมิตของฟังก์ชัน $\dfrac{-xy}{x^2+y^2}$ ตามแนวเส้นโค้ง C เมื่อ $(x,y) \to (0,0)$ ที่กำหนดต่อไปนี้

1.) C เป็นแนวแกน X
2) C เป็นแนวแกน Y
3) แนวเส้นตรง $y = x$
4) แนวเส้นตรง $y = -x$
5) แนวเส้นโค้ง $y = x^2$

วิธีทำ ①

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ตามแนวแกน } X}} \frac{-xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ตามแนว } y=0}} \frac{-xy}{x^2+y^2}$$



$$= \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{-x\cdot 0}{x^2+0^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

(3) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามแนว } y=x}} \frac{-xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{-x x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

<u>หลักการ!</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

ถ้า ① ลิมิตของ $f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ สำหรับบางเส้นโค้ง C ที่ผ่าน (x_0,y_0)

② ถ้ามีเส้นโค้ง C_1 และ C_2 ที่ผ่าน (x_0,y_0) แต่

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{ตามแนว } C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{ตามแนว } C_2}} f(x,y)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ y=x \\ y=-x \\ y=x^2 \\ x=y^2 \end{array}}$$

แล้ว $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ไม่มี (does not exist!)

<u>ตัวอย่าง</u>: จงแสดงว่าลิมิตของ $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ เมื่อ $(x,y)\to(0,0)$ ไม่มี

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาลิมิตตามเส้นตรง $x=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามแนว } x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

พิจารณาลิมิตตามเส้นตรง $y=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามแนว } y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\neq$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ไม่มี □

ตัวอย่าง: จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2y^2}$ ไม่มี

วิธีทำ พิจารณาลิมิตตามแนว $y=x$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2y^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2y^2}$ ไม่มี □

ฝาก! $(x,y) \to (0,0)$

$$\frac{x+y}{2x^2+y^2}, \quad \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad \frac{\cos xy}{x^2+y^2}$$