3.3 สมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทนิยาม: ให้ $f: D \to \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต (bounded function) ถ้า $f(D)$ เป็นเซตมีขอบเขต นั่นคือ มี $M \geq 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in D$

ทฤษฎีบท: (Boundedness of a continuous function) ถ้า $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a,b]$

พิสูจน์ ให้ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน
สมมติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a,b]$
[$\forall M \geq 0 \ \exists x \in [a,b]$ ที่ $|f(x)| > M$]
จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

[f ไม่ต่อเนื่อง $c \in [a,b] \iff \exists (s_n)_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ s.t. $\lim_{n\to\infty} s_n = c$ แต่ $(f(s_n))_{n=1}^{\infty}$ ไม่ลู่เข้าสู่ $f(c)$]

พิจารณา $M = 1$ จะได้ว่า มี $s_1 \in [a,b]$ ที่ $|f(s_1)| > 1$
$M = 2$ จะได้ว่า มี $s_2 \in [a,b]$ ที่ $|f(s_2)| > 2$
$M = 3$ จะได้ว่า มี $s_3 \in [a,b]$ ที่ $|f(s_3)| > 3$
ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ ที่

$$|f(s_n)| > n \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก $a \le s_n \le b$ $\forall n \in \mathbb{N}$ จึงได้ว่า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$
เป็นลำดับมีขอบเขต โดย (BW) จะได้ว่ามีลำดับย่อย
$(s_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่ลู่เข้า และสมมติให้

$$\lim_{j \to +\infty} s_{n_j} = s$$

[จะแสดงว่า $s \in [a,b]$]

เนื่องจาก $a \le s_{n_j} \le b$ $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad a \le \lim_{j \to +\infty} s_{n_j} \le b \Rightarrow s \in [a,b]$$

[จะแสดงว่า $(f(s_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$ ไม่ลู่เข้าสู่ $f(s)$]

เนื่องจาก

$$|f(s_n)| > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad |f(s_{n_j})| > n_j \ge j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น $(f(s_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$ ไม่เป็นลำดับมีขอบเขต
ซึ่งส่งผลให้ $(f(s_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$ ไม่ลู่เข้า
เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง)

□

บทนิยาม: ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า

- f มีค่าต่ำสุด (minimum) บน D ถ้า มี $s_* \in D$ ที่

$$f(s_*) \le f(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in D$$

- f มีค่าสูงสุด (maximum) บน D ถ้า มี $s^* \in D$ ที่

$$f(s^*) \geq f(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in D$$

ทฤษฎีบท: Minimum-Maximum Theorem

ให้ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดบน $[a,b]$ กล่าวคือ $\alpha, \beta \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$f(\alpha) = \min f([a,b])$$

และ

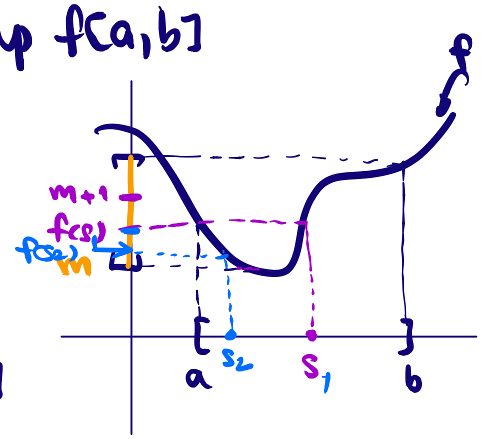
$$f(\beta) = \max f([a,b])$$

พิสูจน์. ให้ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดย the Boundedness of a continuous function จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a,b]$

$$\therefore f[a,b] = f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$$

ดังนั้น $f[a,b]$ เป็นเซตมีขอบเขต ทำให้ได้ว่า มี $m, M \in \mathbb{R}$

$$m := \inf f[a,b] \quad \text{และ} \quad M := \sup f[a,b]$$



เนื่องจาก $m = \inf f[a,b]$

จึงได้ว่า มีจำนวนจริง $s_1 \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$m \leq f(s_1) \leq m+1$$

และ จะได้ว่า มีจำนวนจริง $s_2 \in [a,b]$ ที่ทำให้

$$m \leq f(s_2) \leq m + \frac{1}{2}$$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ ที่สอดคล้อง

$$m \le f(s_n) \le m + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ส่งผลให้

$$m \le \lim_{n \to +\infty} f(s_n) \le m$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(s_n) = m = \inf f[a,b]$$

เนื่องจาก $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดย (BW) จะได้ว่า มีลำดับย่อย $(s_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่ลู่เข้า และสมมติให้

$$\lim_{j \to +\infty} s_{n_j} = \alpha \quad \text{(alpha)}$$

พิจารณา $a \le s_{n_j} \le b \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \in [a,b]$

[จะแสดงว่า $f(\alpha) = m$ และ $f(\alpha) \in f[a,b]$]

พิจารณา

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{j \to +\infty} s_{n_j}\right) = \lim_{j \to +\infty} f(s_{n_j})$$

$$= m = \inf f[a,b]$$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = \underset{\text{max?}}{\inf} f[a,b]$$

เนื่องจาก $\alpha \in [a,b]$ จะได้ว่า $f(\alpha) \in f[a,b]$
ซึ่งสรุปได้ว่า $f(\alpha) = \min f[a,b]$

ฝาก! $f(\beta) = \max f[a,b]$

ทฤษฎีบท: Location of root theorem

ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
ถ้า $f(a) < 0 < f(b)$ หรือ $f(a) > 0 > f(b)$
แล้ว จะมี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้

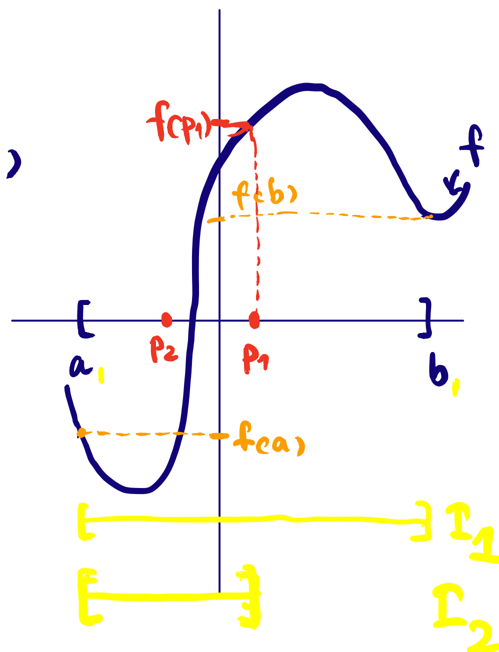
$$f(c) = 0$$

พิสูจน์ สมมติให้ $f(a) < 0 < f(b)$
เราจะพิสูจน์โดยใช้กระบวนการแบ่งเป็นสองส่วน (bisection method) ดังนี้

รอบที่ 1:

ให้ $I_1 = [\overset{a_1}{a}, \overset{b_1}{b}]$ และให้

$$p_1 = \frac{a+b}{2}$$



ถ้า $f(p_1) = 0$ แล้ว ทฤษฎีบทเป็นจริง
ถ้า $f(p_1) > 0$ แล้วเลือก

$a_2 := a_1$ และ $b_2 := p_1$

ถ้า $f(p_1) < 0$ แล้ว เลือก

$a_2 := p_1$ และ $b_2 := b_1$

กำหนดให้ $I_2 = [a_2, b_2]$ จะได้ว่า $I_2 \subset I_1$ และ $f(a_2) < 0 < f(b_2)$
และ $|I_2| = \frac{b-a}{2^1}$

รอบที่ 2:

ให้ $p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$

ถ้า $f(p_2) = 0$ แล้วทฤษฎีบทเป็นจริง
ถ้า $f(p_2) > 0$ แล้วเลือก

$a_3 := a_2$ และ $b_3 := p_2$

ถ้า $f(p_2) < 0$ แล้วเลือก

$a_3 := p_2$ และ $b_3 := b_2$

กำหนดให้

$$I_3 := [a_3, b_3]$$

จะได้ว่า $I_3 \subset I_2$ และ $f(a_3) < 0 < f(b_3)$ และ $|I_3| = \dfrac{b-a}{2^2}$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ถ้า $f(p_n) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ จะได้ลำดับของช่วงปิดและมีขอบเขต $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

และ

$$\underline{f(a_n) < 0} < f(b_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

และ

$$|I_n| = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

ดังนั้น ~~the~~ the nested interval theorem จะได้ว่า

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

สมมติให้ $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \Rightarrow \underline{a_n} \leq c \leq \underline{b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Note! เนื่องจาก $b_n - a_n = |I_n|$

และ $\lim_{n \to +\infty} |I_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$

[จะแสดงว่า $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = c$]

พิจารณา

$$c \le b_n \Rightarrow c - a_n \le b_n - a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (c - a_n) \le 0 \Rightarrow c \le \lim_{n\to+\infty} a_n$$

และ $a_n \le c \Rightarrow a_n - b_n \le c - b_n$

$$\Rightarrow b_n - c \le b_n - a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (b_n - c) \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n \le c$$

ดังนั้น $c \le \lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n \le c$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c$$

[จะแสดงว่า $f(c) = 0$]

เนื่องจาก $f(a_n) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(c) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le 0 \Rightarrow f(c) \le 0$$

และเนื่องจาก $f(b_n) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(c) = f\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \ge 0 \Rightarrow f(c) \ge 0$$

เพราะฉะนั้น $f(c) = 0$

ดีเหลือ เกิน!) $\square$

<u>ทฤษฎีบท</u>: Bolzano's Intermediate Value Theorem

ให้ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีจำนวนจริง k ที่

$$f(a) < k < f(b) \quad \text{หรือ} \quad f(a) > k > f(b)$$

แล้ว จะมี $c \in (a,b)$ ที่

$$f(c) = k$$

<u>พิสูจน์</u>. สมมติให้ $f(a) < k < f(b)$
นิยามฟังก์ชัน $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ โดย

$$g(x) := f(x) - k \quad \forall x \in [a,b]$$

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$

เนื่องจาก

$$\underbrace{f(a) - k}_{= g(a)} < k - k < f(b) - k$$

$$g(a) < 0 < g(b)$$

By the Location of root theorem จะได้ว่า มี $c \in (a,b)$ ที่

$$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - k = 0$$
$$\Rightarrow f(c) = k$$

ที่เหลือ (ฝาก!)

ทฤษฎีบท: ให้ I เป็นช่วงปิด และ $f: I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว เซต

$$f(I) = \{f(x) : x \in I\}$$

เป็นช่วงปิด

พิสูจน์ เนื่องจาก I เป็นช่วงปิด จึงได้ว่า I เป็นเซตปิดและมีขอบเขต (compact set) the minimum-maximum theorem จะได้ว่า มี $\alpha, \beta \in I$ ซึ่งทำให้

$$\underset{m}{\underset{\parallel}{f(\alpha)}} = \inf f(I) \quad \text{และ} \quad \underset{M}{\underset{\parallel}{f(\beta)}} = \sup f(I)$$

[จะแสดงว่า $f(I) = [m, M]$]

จะพบว่า $f(I) \subseteq [m, M]$

พิจารณา ถ้า $m = M$ แล้ว จะได้ว่า

$$f(I) \supseteq \{m\} = [m, M]$$

ถ้า $m < M$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน (α, β) ดังนั้น สำหรับแต่ละ $k \in (m, M)$ เราสามารถประยุกต์ใช้ Bolzano IV Thm. จะได้ว่า มี $c \in (\alpha, \beta)$ ที่

$$f(c) = k$$

ดังนั้น $k \in f(I)$

(Why?)

ดังนั้น $(m, M) \subset f(I)$

(ฝาก!) ให้ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า k เป็นจำนวนจริงที่

$$\inf f[a,b] \le k \le \sup f[a,b]$$

จะได้ว่า มี $c \in (a,b)$ ที่

$$f(c) = k$$