4.2 Limit Theorems:

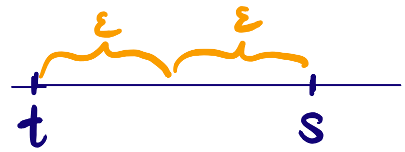
Theorem: สมมติให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าที่ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ และ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t$

ถ้า $s_n \le t_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $s \le t$

$[\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} t_n]$

พิสูจน์ สมมติโดยแย้งว่า $s > t$

กำหนดให้ $\varepsilon := \dfrac{s-t}{2} > 0$



และสมมติให้ $s_n \le t_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

Note! $s - t = 2\varepsilon \Rightarrow \boxed{s-\varepsilon = t+\varepsilon}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|s_n - s| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N_1$$

$$\Rightarrow \quad s-\varepsilon < s_n < s+\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N_1$$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t$ จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|t_n - t| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N_2$$

$$\Rightarrow \quad t-\varepsilon < t_n < t+\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N_2$$

กำหนดให้ $N := \max\{N_1, N_2\}$

ดังนั้น สำหรับทุก $n \ge N$ จะได้ว่า

$$s_n > s-\varepsilon = t+\varepsilon > t_n$$

$$\Rightarrow \quad s_n > t_n \quad \forall n \geq N \quad ↯$$

เพราะฉะนั้น $s \leq t$ $\square$

<u>บทแทรก</u>: ถ้า $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t$ แล้ว ① $t \geq 0$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{t_n} = \sqrt{t}$

พิสูจน์ (ฝากไปดูกันเอง)

<u>Theorem</u>: สมมติให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก และ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L$

ถ้า $L<1$ แล้ว $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก จะได้ว่าลำดับ $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกด้วย

และเนื่องจาก $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L$ โดยบทแทรกข้างต้น จะได้ว่า $L \geq 0$

สมมติว่า $L<1$ by the density of real numbers จะมี $c\in\mathbb{R}$ ที่ทำให้ $0\leq L<c<1$

กำหนดให้ $\varepsilon := c-L>0$

เนื่องจาก $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L$ ดังนั้น จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\left| \frac{s_{n+1}}{s_n} - L \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \quad L - \varepsilon < \frac{s_{n+1}}{s_n} < L + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

กำหนดให้ $k := N+1$ ทำให้ได้ว่า

สำหรับทุก $n \geq k$ จะได้ว่า $n \geq N+1 \Rightarrow n-1 \geq N$

ดังนั้น

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{s_{(n-1)+1}}{s_{(n-1)}} < L + \varepsilon$$

$$= L + c - L = c$$

ดังนั้น $\frac{s_n}{s_{n-1}} < c \quad \forall n \geq k$

$$\Rightarrow \quad s_n < c s_{n-1} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq k$$

พิจารณา สำหรับทุก $n \geq k$ จะได้ว่า

$$0 < s_n < c s_{n-1}$$

$$< c(c s_{n-2}) = c^2 s_{n-2}$$

$$\leq \cdots \leq c^{n-k} s_k$$

$$= c^n \left(\frac{s_k}{c^k} \right)$$

กำหนดให้ $M := \frac{s_k}{c^k}$ จะได้ว่า

$$0 < s_n < c^n M \quad \text{สำหรับทุก } n \geq k$$

เนื่องจาก $c < 1$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n \to +\infty} c^n = 0$ เพราะฉะนั้น

โดยทฤษฎีบทหนีบหรือหนีบท้าย จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 0$$

$\square$