บทนิยาม: เราจะกล่าวว่า ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่ออกสู่ $+\infty$ (diverges to $+\infty$) ถ้า สำหรับทุก $M \in \mathbb{R}$ จะมีจำนวนนับ N ที่ทำให้ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$s_n > M$$

และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

และเราจะกล่าวว่าลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่ออกสู่ $-\infty$ (diverges to $-\infty$) ถ้า สำหรับทุก $M \in \mathbb{R}$ จะมีจำนวนนับ N ที่ทำให้สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$s_n < M$$

และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$

ทฤษฎีบท: สมมติให้ (s_n) และ (t_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง ที่ $s_n \leq t_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

① ถ้า $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ แล้ว $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$

② ถ้า $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$

พิสูจน์ (1) ให้ $M \in \mathbb{R}$ สมมติให้ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

โดยนิยามของการลู่ออก จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$t_n \geq s_n > M \qquad \forall n \geq N$$

ดังนั้น $\lim t_n = +\infty$.

$n \to +\infty$ □

ทฤษฎีบท: ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0$$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) สมมติให้ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0$

[จะแสดงว่า $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$]

ให้ $M > 0$ จะได้ว่า $\varepsilon := \frac{1}{M} > 0$

เนื่องจาก $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0$ จะต้องมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$\forall n \geq N \Rightarrow \frac{1}{M} = \varepsilon > \left|\frac{1}{s_n} - 0\right| = \frac{1}{s_n}$$

$$\Rightarrow s_n > M$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

□

4.3 ลำดับทางเดียวและลำดับโคชี (Monotone sequences and Cauchy sequences)

• ลำดับทางเดียว (Monotone sequence)

บทนิยาม: • เราจะกล่าวว่า ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่ม (increasing sequence) ถ้า $s_{n+1} \geq s_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

• เราจะกล่าวว่า ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลด (decreasing sequence) ถ้า $s_{n+1} \leq s_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

• เราจะกล่าวว่า ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียว (monotone sequence) ถ้า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่ม หรือ ลำดับลด

ตัวอย่าง:

• $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ given by $a_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ BL

$\Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty}$ is increasing

• $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ given by $b_n = 3^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ BL

$\Rightarrow (b_n)_{n=1}^{\infty}$ is increasing

• $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ given by $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, \ldots)$ BL

$\Rightarrow (c_n)_{n=1}^{\infty}$ is increasing

• $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ given by $d_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ B

$\Rightarrow (d_n)_{n=1}^{\infty}$ is decreasing

• $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ given by $e_n = e \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (e_n)_{n=1}^{\infty}$ is both increasing and decreasing

• $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ given by $f_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (f_n)_{n=1}^{\infty}$ is not monotone

ทฤษฎีบท (Monotone Convergence Theorem, MCT)

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียว จะได้ว่า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ มีขอบเขต

[illegible]

- ถ้า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่ม และมีขอบเขตบน แล้ว

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sup\{s_n : n\in\mathbb{N}\}$$

- ถ้า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลด และมีขอบเขตล่าง แล้ว

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \inf\{s_n : n\in\mathbb{N}\}$$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$, We have done before!

$(\Leftarrow)$ ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียว และ สมมติว่า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

เพิ่ม
ลด

นั่นคือ ① $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ มีขอบเขตบน

② $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ มีขอบเขตล่าง

① สมมติให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่ม และมีขอบเขตบน

โดย สัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\bar{s} := \sup\{s_n : n\in\mathbb{N}\}$ หาค่าได้

[ต้องการ $\lim_{n\to+\infty} s_n = \bar{s}$]

ให้ $\varepsilon > 0$. ดังนั้น $\bar{s}-\varepsilon$ ไม่เป็น 

ขอบเขตบนของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ นั่นคือ จะมี $N\in\mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$s_N > \bar{s}-\varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก $n \geq N$

$$\bar{s}-\varepsilon < s_N \leq s_n \leq \bar{s} < s+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon < s_n - \bar{s} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |s_n - \bar{s}| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to+\infty} s_n = \bar{s}$