4.4 ลำดับย่อย (Subsequences)

บทนิยาม: ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนนับ ที่ $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$ เราจะเรียกลำดับ $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ว่าเป็นลำดับย่อย (subsequence) ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$

Ex.

$(s_n)_{n=1}^{\infty}$: $s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6 \quad s_7 \quad s_8 \cdots$

$n_k = 2k, \ \forall k \geq 1 : (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$

$(s_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, \dots)$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$(s_{n_k})_{k=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\right)$

โดยที่ $(n_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

$(s_{n'_k})_{k=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

<u>บทตั้ง</u>: ให้ $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนนับที่ $n_k < n_{k+1}$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$n_k \geqslant k \quad \text{สำหรับทุก } k \in \mathbb{N}.$$

<u>พิสูจน์</u>: พิจารณา $k = 1$ เนื่องจาก $n_1 \in \mathbb{N}$ จึงได้ว่า

$$n_1 \geqslant 1 \quad \text{เสมอ.}$$

ให้ k เป็นจำนวนนับใดๆ สมมติให้

$$n_k \geq k$$

จะแสดงว่า $n_{k+1} \geqslant k+1$

พิจารณา $n_{k+1} > n_k \geqslant k \Rightarrow n_{k+1} > k$

$$\Rightarrow n_{k+1} \geqslant k+1$$

□

<u>ทฤษฎีบท</u>: ถ้า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ s แล้ว ลำดับย่อยของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ s also

<u>พิสูจน์</u> ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าที่ $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ และ

$(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ [Claim! $\lim_{k\to+\infty} s_{n_k} = s$]

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ จะได้ว่า มี $N \in \mathbb{N}$

ที่ทำให้ $\quad |s_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N$

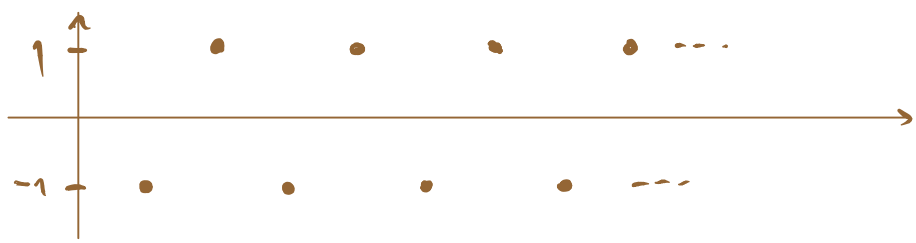
พิจารณา สำหรับทุก $k \geq N$ จะได้ว่า $n_k \geq k \geq N$

นั่นคือ $|s_{n_k} - s| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim_{k \to +\infty} s_{n_k} = s$

$\square$

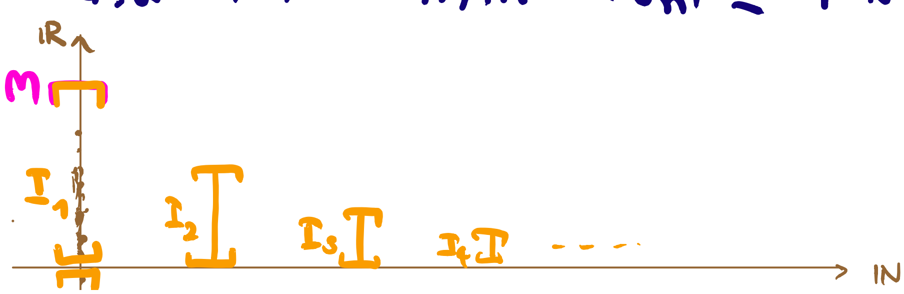
พิจารณา $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

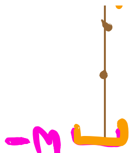


<u>ทฤษฎีบท</u> : (Bolzano-Weierstrass theorem)
ทุกลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าเสมอ

(Every bounded sequence has a convergent subsequence)

<u>พิสูจน์</u> ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต
จะมี $M \geq 0$ ที่ทำให้ $|s_n| \leq M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$





$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \cdots$

$s_{n_1} \quad s_{n_2} \quad s_{n_3} \quad s_{n_4} \cdots \qquad (s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

จากการสร้างจะพบว่า $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ และ:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \cdots$$

ดังนั้น โดย the nested interval theorem จะได้ว่า

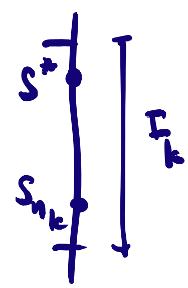
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$$

และสมมติให้ $s^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ [Claim! $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s^*$]

ให้ $\varepsilon > 0$

สังเกตความยาวของช่วง $|I_k|$ คือ $\frac{M}{2^{k-1}}$

ซึ่งคือ $\lim_{k\to+\infty} |I_k| = \lim_{k\to+\infty} \frac{M}{2^{k-1}} = 0$



ซึ่งคือ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|s_{n_k} - s^*| < |I_k| < \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s^*$ $\square$