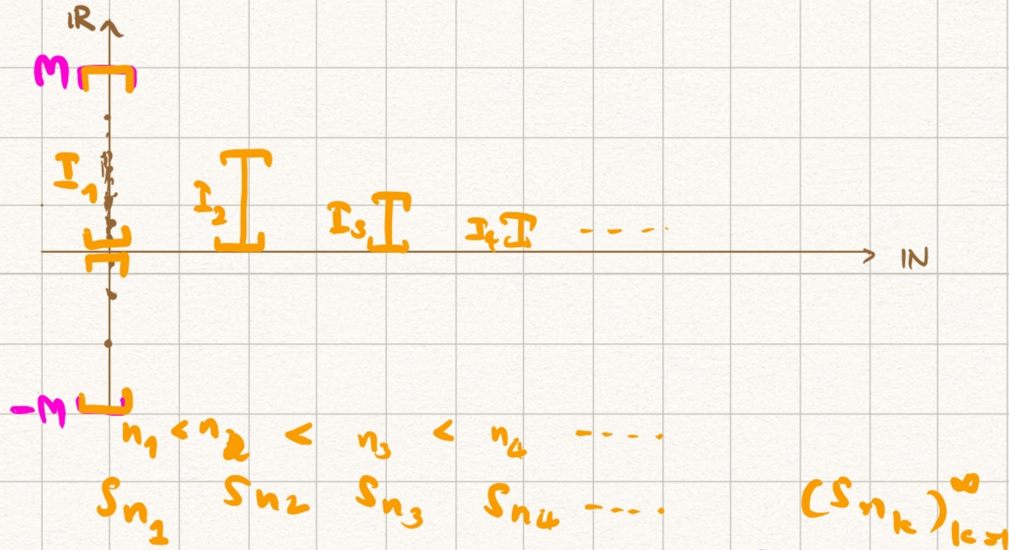
ทฤษฎีบท : (Bolzano-Weierstrass theorem)
ทุกลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าเสมอ

(Every bounded sequence has a convergent subsequence)

พิสูจน์ ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต
จะมี $M \geq 0$ ที่ทำให้ $|s_n| \leq M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$



จากการสร้างจะพบว่า $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ และ:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \cdots$$

ดังนั้น The the nested interval theorem จะได้ว่า

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$$

และสมมติให้ $s^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ [Claim! $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s^*$]

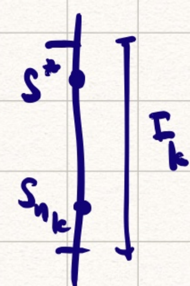
ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจากความยาวของช่วง $|I_k|$ คือ $\frac{M}{2^{k-1}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{k\to+\infty} |I_k| = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{M}{2^{k-1}} = 0$

ดังนั้น จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|s_{n_k} - s^*| < |I_k| < \varepsilon \quad \forall k \geq N$$

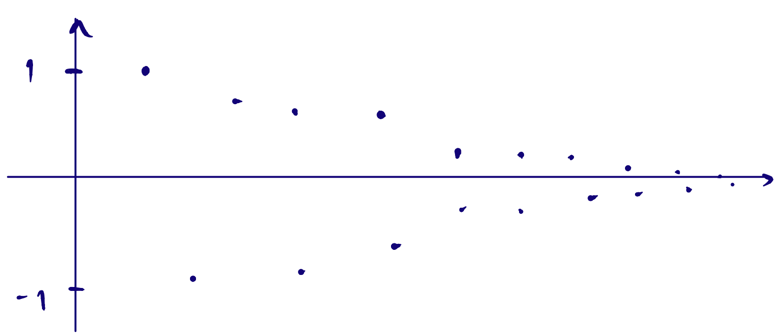


เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n_k} = s^*$ $\square$

• ลำดับโคชี (Cauchy sequences)

บทนิยาม: ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เราจะกล่าวว่า ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี (Cauchy seq.)
ถ้า สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $N_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } m, n \geq N_0$$



ตัวอย่าง: (1) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี ?

วิธีทำ.

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $N_0 \in \mathbb{N}$ ที่ $N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$

พิจารณา สำหรับทุก $m,n \geq N_0 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N_0}$ และ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\left(-\frac{1}{n}\right)\right| \quad < \varepsilon$$

$$= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0}$$

$$= \frac{2}{N_0} < \varepsilon$$

ฝาก! $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ ไม่เป็นลำดับโคชี (อาลิสา)

ทฤษฎีบท: ทุกลำดับลู่เข้า เป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า และให้ $\lim_{n \to +\infty} s_n = s^*$
ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $N_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|s_n - s^*| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N_0$$

พิจารณา สำหรับทุก $m,n \geq N_0$

$$|s_m - s_n| = |s_m - s^* + s^* - s_n| \qquad (< \varepsilon)$$
$$\leq |s_m - s^*| + |s_n - s^*|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$
$$= 2\varepsilon/2 = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี

<u>บทตั้ง</u>: ทุกลำดับโคชีเป็นลำดับมีขอบเขต

<u>ทฤษฎีบท</u>: [Cauchy Convergent Criterion)

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า
$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี

<u>พิสูจน์</u> ($\Rightarrow$) ทำแล้ว!

($\Leftarrow$) สมมติให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี ซึ่งผลให้ได้ว่า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดยการประยุกต์ใช้ Bolzano-Weierstrass จะได้ว่า มีลำดับย่อย $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่ลู่เข้า และสมมติให้ $\lim_{k\to+\infty} s_{n_k} = s^*$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี จะมี $N_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m,n \geq N_0$$

ในอีกด้านหนึ่ง เนื่องจาก $\lim_{k\to+\infty} s_{n_k} = s^*$ จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$

ที่ทำให้ $|s_{n_k} - s^*| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq N_1$

ไม่ใช้

ให้ $N' := \max\{N_0, N_1\}$ และ $k_0 \geq N'$ $\Rightarrow k_0 \geq N_1$

$\Rightarrow n_{k_0} \geq k_0 \geq N'$

ดังนั้น สำหรับทุก $n \geq N'$ จะได้ว่า

$$|s_n - s^*| = |s_n - s_{n_{k_0}} + s_{n_{k_0}} - s^*| \qquad (< \varepsilon)$$

$$\leq |s_n - s_{n_{k_0}}| + |s_{n_{k_0}} - s^*|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$= \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า $\square$