ลิมิตซุพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์
(Superior limit and Inferior limit)

ข้อตกลง! ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่เป็นเซตว่างและมีขอบเขตบน

$\overset{CA}{\Longrightarrow}$ A จะมีขอบเขตบนน้อยสุด $\alpha = \sup A$

- ถ้า A ไม่มีขอบเขตบนแล้ว กำหนดให้ $\sup A = +\infty$

ในทำนองเดียวกัน

- ถ้า A ไม่มีขอบเขตล่าง แล้ว กำหนดให้ $\inf A = -\infty$

ทฤษฎีบท: ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และให้

$$\alpha_n := \sup\{s_k : k \geq n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

และ

$$\beta_n := \inf\{s_k : k \geq n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

แล้ว $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า

พิสูจน์. เนื่องจาก $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ดังนั้น จะมี $M \geq 0$ ที่ทำให้

$$-M \leq s_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

พิจารณา สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$

$$\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$$

จะได้ว่า เซตดังกล่าวมีขอบเขตบน โดย (CA) จะได้ว่า มี $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\alpha_n = \sup\{s_n, s_{n+1}, \dots\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Claim!</u> $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า $\overset{(MCT)}{\Longleftarrow}$ ① monotone decreasing ② bounded from below

① พิสูจน์ [$\alpha_{n+1} \le \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N}$]

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เราทราบว่า

$$\{s_n, s_{n+1}, \dots\} \supseteq \{s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \sup\{s_n, s_{n+1}, \dots\} \geq \sup\{s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\} = \alpha_{n+1}$$

เพราะฉะนั้น $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลด

② พิสูจน์ เนื่องจาก

$$-M \le s_n \le \alpha_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

เพราะฉะนั้น $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขตล่าง

โดยการประยุกต์ใช้ MCT จะได้ว่า $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า และ:

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \inf_{n\geq 1} \alpha_n$$

<u>ฝาก!</u> ... $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \sup_{n\geq 1} \beta_n$ $\square$

<u>นิยาม:</u> ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ลิมิตซุพีเรียร์ (superior limit) ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ คือ

$$\limsup_{n\to+\infty} s_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} s_k$$

และ ลิมิตอินฟีเรียร์ (inferior limit) ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ คือ

$$\liminf_{n\to+\infty} s_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} s_k$$

ข้อสังเกต! ถ้า $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

$$\limsup_{n\to+\infty} s_n = \inf_{n\geq 1}\underbrace{\sup_{k\geq n} s_k}_{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty}\alpha_n$$

และ

$$\liminf_{n\to+\infty} s_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} s_k = \lim_{n\to+\infty}\beta_n$$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่นิยามโดย $s_n=(-1)^n$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

จงหา $\limsup\limits_{n\to+\infty} s_n$ และ $\liminf\limits_{n\to+\infty} s_n$

วิธีทำ พิจารณา $\limsup\limits_{n\to+\infty} s_n = \inf\limits_{n\geq 1}\underline{\sup\limits_{k\geq n} s_k}$

For $n=1$; $\sup\limits_{k\geq 1} s_k = \sup\{s_1,s_2,s_3,\dots\}$

$= \sup\{-1,1,-1,\dots\} = 1$

For $n=2$; $\sup\limits_{k\geq 2} s_k = \sup\{s_2,s_3,s_4,\dots\}$

$= \sup\{1,-1,1,\dots\} = 1$

...

$$\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} s_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} s_k = \inf\{1,1,1,\dots\} = 1$$

ฝึก! กำหนดให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่นิยามโดย $s_n = 1+\frac{1}{n}$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

จงหา $\limsup_{n\to+\infty} s_n$ และ $\liminf_{n\to+\infty} s_n$

ทฤษฎีบท: ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต แล้ว จะมีลำดับย่อย $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่

$$\lim_{k\to+\infty} s_{n_k} = \limsup_{n\to+\infty} s_n$$

และจะมีลำดับย่อย $(s_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ ของ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่

$$\lim_{j\to+\infty} s_{n_j} = \liminf_{n\to+\infty} s_n$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต กำหนดให้

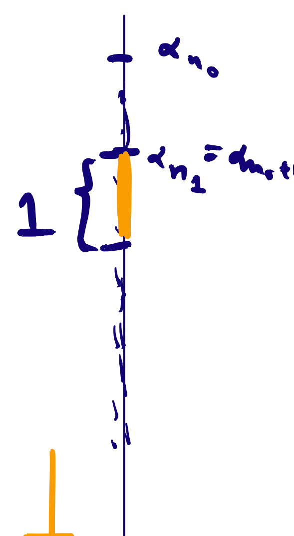
$$s = \limsup_{n\to+\infty} s_n$$

และ

$$a_n = \sup\{s_k : k \geq n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

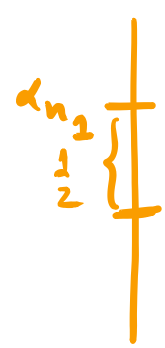
จากข้อสังเกตช่วงต้นจะได้ว่า

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = s$$



Claim! $\lim_{k\to+\infty} s_{n_k} = s$!

เนื่องจาก $a_n = \sup\{s_k : k \geq n\}$



ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$ ดังนั้น จะมี $n_1 \geq n_0$ ที่ทำให้

$$a_{n_0+1} - 1 \leq s_{n_1} \leq a_{n_0+1}$$

ในทำนองเดียวกัน จะมี $n_2 \geq n_1+1 > n_1$ ที่ทำให้

$$\alpha_{n_1+1} - \frac{1}{2} \leq s_{n_2} \leq \alpha_{n_1+1}$$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ลำดับ $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ ที่
$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ และ

$$\alpha_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} \leq s_{n_k} \leq \alpha_{n_{k-1}+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทหนีบ หรือหนีบท้าย จะได้ว่า

$$\lim_{k \to +\infty} s_{n_k} = s. \qquad \square$$