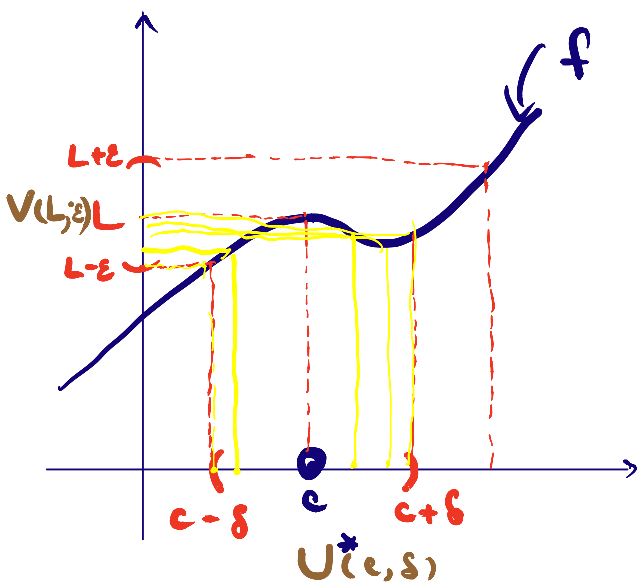
บทที่ 3
ลิมิตของฟังก์ชันและความต่อเนื่อง
(Functional Limits and Continuity)

ทบทวน! ให้ $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D' \iff \forall \varepsilon > 0,\ N^*(x;\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$$

บทนิยาม: (Functional Limit)
ให้ $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ และ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $c \in D'$
เราจะกล่าวว่า $L \in \mathbb{R}$ เป็นลิมิตของ f ที่จุด c
ถ้า สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ สำหรับทุก $x \in D$
และ $0 < |x-c| < \delta$ จะต้องได้ว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$



$\varepsilon > 0$

ถ้า L เป็นลิมิตของ f ที่จุด c
แล้วเราจะกล่าวว่า $f(x)$ ลู่เข้า (converges) สู่ L เมื่อ x เข้าใกล้ c และเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$f(x) \to L$ เมื่อ $x \to c$
(as)

ข้อสังเกต! ให้ $f: D \to \mathbb{R}$ และ $c \in D'$

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall \text{ nbhd } V(L;\varepsilon)\ \exists \text{ dnbhd } U^*(c;\delta) \text{ s.t. } f(U^*(c;\delta) \cap D) \subset V(L;\varepsilon)$$

ตัวอย่าง: ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ $D \subseteq \mathbb{R}$ เขตนิยามฟังก์ชัน $f: D \to \mathbb{R}$ โดย

$$f(x) = x \qquad \text{สำหรับทุก } x \in D$$

จงแสดงว่า $\lim_{x\to c} f(x) = c$

วิธีทำ $\left[\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t } \forall x \in D \text{ and } 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right]$

ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $\boxed{\delta = \varepsilon}$

จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in D$ และ $0 < |x-c| < \delta$ จะต้องได้ว่า

$$|f(x) - c| = |x - c| < \delta = \varepsilon \quad (<\varepsilon)$$

$\square$

ตัวอย่าง: ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = x^2$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

วิธีทำ $\left[\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall x \in D \wedge 0 < |x - c| < \delta, \ |f(x) - L| < \varepsilon \right]$

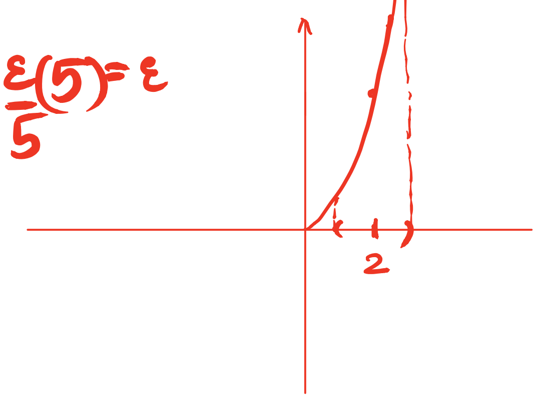
ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $\boxed{\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}}$

พิจารณา สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{R}$ และ $0 < |x-2| < \delta$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|f(x) - 4| &= |x^2 - 4| \\
&= |x-2||x+2| \\
&< \delta \quad 5 \le \frac{\varepsilon}{5}(5) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

$(< \varepsilon)$



สมมติ $\delta < 1$

จะได้ว่า $|x+2| < |3+2| = 5$

$$
\begin{aligned}
|x+2| = |x-2+4| &\le |x-2| + 4 \\
&< 1 + 4 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงแสดงว่า $\lim_{x \to 3} (x^2 - 5x + 1) = -5$

วิธีทำ $\left[\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \right.$ ถ้า $x \in D$ และ $0 < |x-c| < \delta$ แล้ว $\left. |f(x) - L| < \varepsilon \right]$

ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $\boxed{\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}}$

พิจารณา สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ และ $0<|x-3|<\delta$
จะได้ว่า

$$|f(x)-(-5)| = |x^2-5x+1+5| \qquad (<\varepsilon)$$
$$= |x^2-5x+6|$$
$$= |x-2||x-3|$$
$$< 2\delta \le 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

พิจารณา $|x-2| = |x-3+1|$
$$\le |x-3|+1 < 1+1 = 2$$

$\square$

ทฤษฎีบท: [Sequential Criterion for Functional Limit]

ให้ $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ และ $f: D \to \mathbb{R}$ และ $c \in D'$ จะได้ว่า

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$
ที่ $s_n \neq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ และ
$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = c$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n) = L$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับใน D โดยที่ $s_n \neq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ และ
$\lim s_n = c$

$n \to +\infty$

[จะแสดงว่า $\lim\limits_{n \to +\infty} f(s_n) = L$]

ให้ $\varepsilon > 0$ [จะต้องแสดงว่า $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f(s_n) - L| < \varepsilon$]

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ จะได้ว่า มี $\delta > 0$ ที่ทำให้

สำหรับทุก $x \in D$ และ $0 < |x - c| < \delta$ จะต้องได้ว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ $\Big\} \to (*)$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = c$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

สำหรับทุก $n \geq n_0$ จะได้ว่า $0 < |s_n - c| < \delta$

โดยการประยุกต์ใช้ $(*)$ จะได้

$$|f(s_n) - L| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n \to +\infty} f(s_n) = L$

($\Leftarrow$) สมมติให้ สำหรับทุกลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ ที่ $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = c$

และ $s_n \neq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n \to +\infty} f(s_n) = L$

[จะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni$ ถ้า $x \in D$ และ $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$]

สมมติข้อขัดแย้งว่า $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq L$

นั่นคือ มี $\varepsilon > 0$ ที่สำหรับทุก $\delta > 0$ จะมี $x \in D$ ที่ $0 < |x - c| < \delta$ แต่ $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ $\Big\} (**)$

พิจารณา $1\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{1}>0$ จะมี $s_1\in D$ ที่ $0<|s_1-c|<\frac{1}{1}$
แต่ $|f(s_1)-L|\geq\varepsilon$

พิจารณา $2\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{2}>0$ จะมี $s_2\in D$ ที่ $0<|s_2-c|<\frac{1}{2}$
แต่ $|f(s_2)-L|\geq\varepsilon$

พิจารณา $3\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{3}>0$ จะมี $s_3\in D$ ที่ $0<|s_3-c|<\frac{1}{3}$
แต่ $|f(s_3)-L|\geq\varepsilon$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่
$(s_n)_{n=1}^{\infty}\subset D$ และ $0<|s_n-c|\leq\frac{1}{n}$ แต่ $|f(s_n)-L|\geq\varepsilon$

จะได้ว่า $\lim_{n\to+\infty} s_n = c$ แต่ $(f(s_n))_{n=1}^{\infty}$ ไม่ลู่เข้าสู่ L

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to c} f(x)=L$

□

<u>บทแทรก!</u> ถ้า $f:D\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน และ $c\in D'$
แล้ว f จะมีลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $f:D\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน และ $c\in D'$
และ $\lim_{x\to c} f(x)=L$ และ $\lim_{x\to c} f(x)=M$

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ $(s_n)_{n=1}^{\infty}\subset D$ และ $s_n\neq c\ \forall n\in\mathbb{N}$
และ $\lim_{n\to+\infty} s_n = c$.

โดย (SCFL) จะได้ว่า $\lim_{n\to+\infty} f(s_n)=L$

และ $\lim_{n\to\infty} f(s_n)=M$

เพราะฉะนั้น $L = M$ $\square$

บทแทรก (ตามหมาย) ให้ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in D'$ และ $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ หาค่าได้

ถ้า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in D$ แล้ว

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$