บทนิยาม: ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $g : D \to \mathbb{R}$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$

นิยามฟังก์ชัน

① ผลบวก (sum) $f+g : D \to \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in D$$

② ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) $\alpha f : D \to \mathbb{R}$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in D$$

③ ผลคูณ (product) $fg : D \to \mathbb{R}$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in D$$

④ ถ้า $g(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in D$ จะได้ผลหาร (quotient) $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D$$

ทฤษฎีบท: ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $g : D \to \mathbb{R}$ และ $c \in D'$

ถ้า $\lim_{x \to c} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to c} g(x) = M$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$

แล้ว

(1) $\lim\limits_{x\to c}(f+g)(x) = L+M$

(2) $\lim\limits_{x\to c}(\alpha f)(x) = \alpha L$

(3) $\lim\limits_{x\to c}(fg)(x) = LM$

(4) ถ้า $g(x)\neq 0\ \forall x\in D$ และ $M\neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$$

<u>พิสูจน์</u> ฝาก! $\square$

3.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

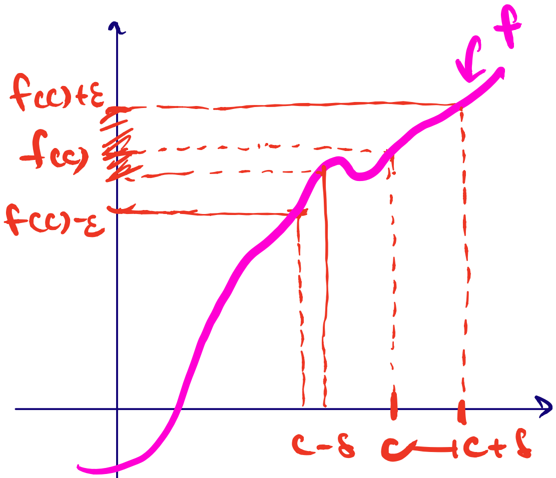
ในหัวข้อก่อนหน้านี้ เราได้ศึกษาลิมิตของฟังก์ชัน f ณ จุด $c\in\mathbb{R}$ และพบว่าฟังก์ชัน f ที่พิจารณาเหล่านั้น ค่า $f(c)$ ไม่จำเป็นต้องหาค่าได้ หรือแม้จะหาได้ ค่า $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ จะต้องเท่ากับ $f(c)$ แต่ถ้า $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ แล้วเราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด c

<u>บทนิยาม</u>: (Continuity) ให้ $\emptyset\neq D\subseteq\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$

และ $c \in D$ เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c ถ้า

สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $x \in D$ และ $|x-c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$



$\forall$ nbhd $V(f(c);\varepsilon)$,
$\exists$ nbhd $U(c;\delta) \ni$
$f(D \cap U(c;\delta)) \subset V(f(c);\varepsilon)$

ทฤษฎีบท: ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $c \in D$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

(2) สำหรับทุก nbhd V ของ $f(c)$ จะมี nbhd U ของ c ที่ทำให้ $f(D \cap U) \subset V$

(3) สำหรับทุกลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ ที่ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = c$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n) = f(c)$

นอกจากนี้ ถ้า $c \in D'$ แล้ว (1), (2) และ (3) สมมูลกับ

(4) f มีลิมิตที่จุด c และ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

ทฤษฎีบท: (Sequential Criterion for Continuity)

ถ้า $f : D \to \mathbb{R}$ และ $c \in D$ จะได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $c \Leftrightarrow$ สำหรับทุกลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ ที่ $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = c$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \to +\infty} f(s_n) = f(c)$$

<u>ตัวอย่าง</u>: ให้ $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$f(x) = \frac{1}{x}$ สำหรับทุก $x \in (0, +\infty)$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

<u>วิธีทำ</u> ให้ $c \in (0, +\infty)$ เป็นจุดใดๆ

[รู้ (SCC) f : cont. at $c \Leftrightarrow \forall (s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ s.t. $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = c$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(s_n) = f(c)$]

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ ที่ $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = c$

พิจารณา

$$\lim_{n \to +\infty} f(s_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{c} = f(c)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c

เนื่องจาก c เป็นจุดใดๆ ใน $(0, +\infty)$ จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$\square$

<u>ข้อสังเกต!</u> $f : D \to \mathbb{R}$ และ $c \in D$

f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $c \Leftrightarrow$ มีลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ ที่ $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = c$ แต่ $(f(s_n))_{n=1}^{\infty}$

ไม่ลู่เข้าสู่ $f(c)$

ตัวอย่าง: ให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{ถ้า } x<0\\ 1 & \text{ถ้า } x\geq 0\end{cases}$$

จงแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

วิธีทำ **Note!** $f(0)=1$

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ $s_n := -\frac{1}{n}$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

จะได้

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to+\infty} f(s_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}(-1) = -1$$

เพราะฉะนั้น โดย (SCC) จึงสรุปได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ 0 □

ทฤษฎีบท: ให้ $f:D\to\mathbb{R}$ และ $g:D\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c จะได้ว่า

(1) $f+g$ และ fg เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

(2) ถ้า $g(x)\neq 0$ สำหรับทุก $x\in D$ แล้ว $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

พิสูจน์ (2) สมมติให้ $g(x)\neq 0$ สำหรับทุก $x\in D$

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ ที่ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = c$

[จะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(s_n) = \left(\frac{f}{g}\right)(c)$]

พิจารณา

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(s_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(s_n)}{g(s_n)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty} g(s_n)} = \frac{f(c)}{g(c)} = \left(\frac{f}{g}\right)(c)$$

เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

$$\lim_{n\to+\infty} f(s_n) = f(c) \text{ และ } \lim_{n\to+\infty} g(s_n) = g(c)$$

ที่เหลือ (ฝาก!)

<u>ทฤษฎีบท</u>: ให้ $f: D\to\mathbb{R}$ และ $g: E\to\mathbb{R}$ โดยที่ $f(D)\subset E$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $c\in D$ และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $f(c)\in E$ แล้ว $g\circ f: D\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

<u>พิสูจน์</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $c\in D$ และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $f(c)$

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ ที่ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = c$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c จึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(c)$$

และเนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $f(c)$ จึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(s_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(s_n)) = g(f(c)) = g\circ f(c)$$

เพราะฉะนั้น $g\circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

$\square$