การตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรม

(1) **The geometric series**: พิจารณาอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

ถ้า $|r| \geq 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = +\infty$

(2) **The nth-term test for divergence**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ

ถ้า $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

(3) **The absolute convergence test**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ

ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

(4) **Combining series**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ใด ๆ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n \pm b_n) < +\infty$ และ

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n \pm b_n) = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n \pm b_n) = +\infty$

ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n \pm b_n) < / = +\infty$

(5) **The integral test**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ที่ $a_n \geq 0$ สำหรับทุก $n \geq 1$ และ $r \in \mathbb{N}$
ถ้า ฟังก์ชัน $f(n) := a_n$ สำหรับทุก $n \geq r$ เป็นฟังก์ชัน**ต่อเนื่อง** และ **ไม่เพิ่ม** $(f'(x) < 0)$ แล้ว จะได้ว่า

ถ้า $\int_{x=r}^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

ถ้า $\int_{x=r}^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

(6) **The p-series**: ให้ $p \in \mathbb{R}$ พิจารณาอนุกรมพี $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

ถ้า $p > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty$

ถ้า $p \leq 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$

(7) **The comparison test**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ที่

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ สำหรับทุก } n \geq 1$$

ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

(8) **The limit comparison test**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ที่

$$a_n \geq 0 \text{ และ } b_n > 0 \text{ สำหรับทุก } n \geq 1 \text{ และ } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

ถ้า $L = 0$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

ถ้า $0 < L < +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < / = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < / = +\infty$

ถ้า $L = +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

(9) **The (Leibniz's) alternating series test**: พิจารณาอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ที่

$$a_n \geq 0 \text{ และ } a_n \geq a_{n+1} \text{ สำหรับทุก } n \geq 1$$

ถ้า $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n < +\infty$

<u>**Note!**</u> พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ เราจะกล่าวว่า

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ (a.c.) ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (c.c.) ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$

(10) **The ratio test**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ ที่

$$a_n \neq 0 \text{ สำหรับทุก } n \geq 1 \text{ และ } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ a.c.

ถ้า $1 < L \leq +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ถ้า $L = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้ ($\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty, < +\infty$ a.c.,$< +\infty$ c.c.)

(11) **The root test**: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ ที่

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ a.c.

ถ้า $1 < L \leq +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ถ้า $L = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้ ($\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty, < +\infty$ a.c.,$< +\infty$ c.c.)