3.4 ความต่อเนื่องแบบเอกรูป (Uniform Continuity)

ทบทวน! ให้ $f: D \to \mathbb{R}$, $c \in D$

f is cont. at $c \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon, c} > 0$ ที่ทำให้

$\forall x \in D$ s.t. $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

ตัวอย่าง $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\boxed{\delta = \varepsilon/2}$

พิจารณา สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$ s.t. $|x - y| < \delta$
จะได้ว่า

$$|f(x) - f(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

บทนิยาม! ให้ $f: D \to \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป (uniformly continuous function) บน D ถ้า สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ สำหรับทุก $x, y \in D$ ที่ $|x - y| < \delta$ จะได้ว่า $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ตัวอย่าง: พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ บน $\mathbb{R}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

วิธีทำ ให้ $c \in \mathbb{R}$ เป็นจุดใดๆ

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|c|}\right\}$

พิจารณา $|x+c| \le |x|+|c| < 1+|c|+|c| = 1+2|c|$

สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ที่ $|x-c| < \delta$

$\Rightarrow |x|-|c| < \delta \Rightarrow |x| < \delta+|c| < 1+|c|$

สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ที่ $|x-c| < \delta$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(c)| &= |x^2-c^2| \\
&= |(x-c)(x+c)| \\
&\le |x-c||x+c| \\
&< \delta(1+2|c|) \le \frac{\varepsilon}{1+2|c|}(1+2|c|) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ บน $[-10,10]$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป บน $[-10,10]$

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{20}}$

สำหรับทุก $x,y \in [-10,10]$ ที่ $|x-y| < \delta$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |x^2-y^2| \\
&= |(x-y)(x+y)| \\
&\le |x-y||x+y| \\
&< \delta\, 20 = \frac{\varepsilon}{20} 20 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

พิจารณา สำหรับทุก $x,y \in [-10,10]$

จะได้

$|x+y| \le 20$

ทฤษฎีบท: (Uniform Continuity Theorem)

ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$
แล้ว จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน $[a,b]$

พิสูจน์ สมมติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน $[a,b]$
จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$

$$\left[\exists \varepsilon>0, \forall \delta>0, \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] \text{ s.t. } |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ และ } |f(x_\delta)-f(y_\delta)| \geq \varepsilon\right]$$

นั่นคือ จะมี $\varepsilon_0>0$ ที่ทำให้

สำหรับ $\delta=1$ จะมี $x_1, y_1 \in [a,b]$ ที่
$|x_1-y_1|<1$ และ $|f(x_1)-f(y_1)|\geq\varepsilon_0$

สำหรับ $\delta=\frac{1}{2}$ จะมี $x_2, y_2 \in [a,b]$ ที่
$|x_2-y_2|<\frac{1}{2}$ และ $|f(x_2)-f(y_2)|\geq\varepsilon_0$

สำหรับ $\delta=\frac{1}{3}$ จะมี $x_3, y_3 \in [a,b]$ ที่
$|x_3-y_3|<\frac{1}{3}$ และ $|f(x_3)-f(y_3)|\geq\varepsilon_0$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ลำดับ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ใน $[a,b]$ ที่

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n} \text{ และ } |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$$

เนื่องจาก $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ นั่นคือ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดย (BW) จะได้ว่า มีลำดับย่อย $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty} \subset (x_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่ลู่เข้า และสมมติ $\lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = x^*$

ดังนั้น $a \leq x_{n_j} \leq b \;\; \forall j\in\mathbb{N} \Rightarrow x^* \in [a,b]$

เนื่องจาก $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับมีขอบเขต เราพิจารณาลำดับย่อย $(y_{n_j})_{j=1}^{\infty} \subset (y_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่สมนัย (correspond) กับลำดับ $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ จะได้ว่า

$$|x_{n_j} - y_{n_j}| < \frac{1}{n_j} \Rightarrow \lim_{j\to+\infty} |x_{n_j} - y_{n_j}| \le 0$$

(why?)

$$\Rightarrow \lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = \lim_{j\to+\infty} y_{n_j}$$

ส่งผลให้ $\lim_{j\to+\infty} y_{n_j} = x^*$

ดังนั้น $(y_{n_j})_{j=1}^{\infty} \subset [a,b]$ ที่ $\lim_{j\to+\infty} y_{n_j} = x^* \in [a,b]$

เหลือแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$
สมมติขัดแย้งว่า f ต่อเนื่องที่ $x^* \in [a,b]$
ดังนั้น $\lim_{j\to+\infty} f(y_{n_j}) = f(x^*)$ และ $\lim_{j\to+\infty} f(x_{n_j}) = f(x^*)$

แต่เราทราบว่า

$$\varepsilon_0 \le |f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})|$$

$$\le |f(x_{n_j}) - f(x^*)| + |f(x^*) - f(y_{n_j})| \to 0 \quad (\text{as } j\to+\infty)$$

$\Rightarrow \varepsilon_0 \le 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $\varepsilon_0 > 0$
ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x^* \in [a,b]$
เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$

$\square$

<u>ทฤษฎีบท</u>: (Cauchyness via uniform continuity)

ให้ $f: D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน D และ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีใน D แล้วจะได้ว่า $(f(s_n))_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี