บทที่ 4

ลำดับของจำนวนจริง
(Sequences of Real Numbers)

4.2 ลำดับของจำนวนจริง

ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับและมีโคโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง

<u>ตัวอย่าง</u>: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

x	1	2	3	4	$\cdots$	n	$\cdots$
$f(x)$	1^2	2^2	3^2	4^2	$\cdots$	n^2	$\cdots$
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$		$\parallel$	
	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n	$\cdots$

$(f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots, f(n), \ldots)$

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$

และเราจะเรียก $a_n := f(n)$ ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ

- เราสามารถเขียนลำดับได้หลากหลายรูปแบบ เช่น

  $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

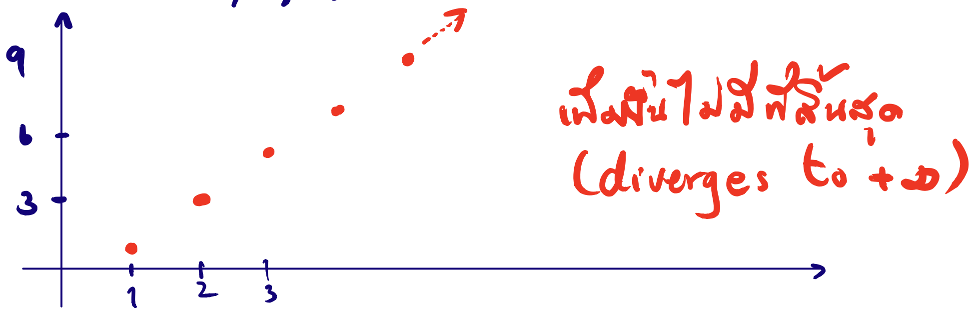
  $(a_n)_{n \geq 1}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, (a_n)

  $\{a_n\}_{n \geq 1}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$

  $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$, $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$, $\langle a_n \rangle$

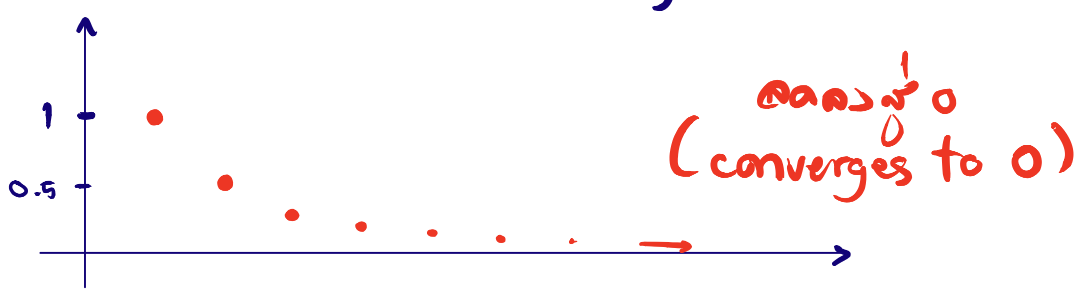
ตัวอย่าง : ลองพลอตกราฟของลำดับต่อไปนี้

(1) $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} \Rightarrow a_n = 2n-1$

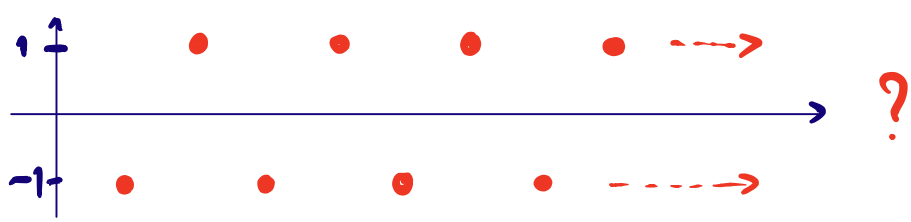


(2) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots\} \Rightarrow a_n = \sqrt{n}$

(3) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{5}$



(4) $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\} \Rightarrow a_n = (-1)^n$



บทนิยาม: ให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ L ถ้า สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

($\lim a_n = L$)

$n\to\infty$ $(a_n \to L)$ [ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $|a_n - L| < \varepsilon$]

ตัวอย่าง: พิจารณาลำดับ $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}^{\infty}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_0 = 3$ ที่ทำให้ $\forall n \geq 3$, $|a_n - 1| < \varepsilon$

ตัวอย่าง: ① จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} k = k$ (โดยที่ k เป็นค่าคงที่)

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $n_0 \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนนับใดๆ
ซึ่งทำให้ได้ว่า
สำหรับทุก $n \geq n_0$ จะได้ว่า
$|a_n - L| = |k - k| = 0 < \varepsilon$

② จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

วิธีทำ Fact! ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $\boxed{n_0 > \frac{1}{\varepsilon}}$

พิจารณา สำหรับทุก $n \geq n_0$ จะได้ว่า $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$

$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ □

$$\lim_{n\to\infty} k = k$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

จำ!

บทนิยาม: ให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เราจะกล่าวว่า

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่ออกสู่ $+\infty$ ถ้า $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ [ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $a_n > M$]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่ออกสู่ $-\infty$ ถ้า $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ [ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $a_n < M$]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

ตัวอย่าง:

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$$

$\{(-1)^n\}$ ลู่ออก

4.4 ลิมิตของลำดับของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท: ให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ และ } \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

จะได้ว่า

① $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

② ให้ $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = kA$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$

④ ถ้า $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ และ $B \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้ (ถ้ามี)

① $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = (-1) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = (-1)(0) = 0$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$= 1 - 0 = 1$$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5 - 6n}{n^6 + 3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^5}{n^6} - \frac{6n}{n^6}}{\frac{n^6}{n^6} + \frac{3}{n^6}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{6}{n^5}}{1 + \frac{3}{n^6}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 6\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 3\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^6}}$$

$$= \frac{0 - 6(0)}{1 + 3(0)} = 0$$

④ $$\lim_{n\to\infty} \frac{4 - 7n^6}{n^6 + 10n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^6} - \frac{7n^6}{n^6}}{\frac{n^6}{n^6} + \frac{10n}{n^6}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^6} - 7}{1 + \frac{10}{n^5}} = \frac{4\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^6} - 7}{1 + 10\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}}$$

$$= \frac{4(0) - 7}{1 + 10(0)} = \frac{-7}{1} = -7$$

⑤ $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10} + n^8 + 1}{n^8 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{10}}{n^{10}} + \frac{n^8}{n^{10}} + \frac{1}{n^{10}}}{\frac{n^8}{n^{10}} + \frac{n^2}{n^{10}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{10}}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^8}} = +\infty$$