<u>ทบทวน!</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k$$

สมบัติของลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

ให้ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ และ $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ โดยที่

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

จะได้ว่า

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = LM$

(3) ถ้า $k$ เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$$

(4) ถ้า $g(x,y) \neq 0$ สำหรับทุก $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ และ $M \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

(5) ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{m/n} = L^{m/n}$$

ตัวอย่าง: จงหาลิมิตของ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \sqrt{x^2+y^2}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(2,1)} \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{\lim_{(x,y)\to(2,1)} (x^2+y^2)} \\
&= \sqrt{\lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(2,1)} y^2} \\
&= \sqrt{\Big(\lim_{(x,y)\to(2,1)} x\Big)^2 + \Big(\lim_{(x,y)\to(2,1)} y\Big)^2} \\
&= \sqrt{(2)^2+(1)^2} \\
&= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$ $\square$

ตัวอย่าง: จงหาลิมิตของ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

วิธีทำ พิจารณา
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$= 0(\sqrt{0}+\sqrt{0}) = 0$$

$\square$

• ความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

ให้ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$
เราจะกล่าวว่า $f$ ต่อเนื่อง ที่ $(x_0,y_0)$
ถ้า ① $f(x_0,y_0)$ หาค่าได้

② $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าได้

③ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ถ้า $f$ ต่อเนื่องที่ทุก $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ แล้ว เราจะกล่าวว่า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

<u>ตัวอย่าง</u>: จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ถ้า } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

<u>วิธีทำ</u> [จะแสดงว่า $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$]

พิจารณา $f(0,0) = 0$

พิจารณา $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ [Claim! หาค่าไม่ได้]

พิจารณา $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามแกน } y}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$

(ทำเอง)

และ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามแกน } x}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$

และ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ตามแนว } y=x}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

ดังนั้น $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(x,y)=(0,0)$

$\square$

## 3.5 อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative)

พิจารณา $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

พิจารณา $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$z = f(x,y)$$

ถ้า ตรึง (fix) $x = x_0$ จะได้ว่า $f'(x_0,y)$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f$ ณ $(x_0,y)$

ถ้า ตรึง (fix) $y = y_0$ จะได้ว่า $f'(x,y_0)$ " ------------ " $f$ ณ $(x,y_0)$

พิจารณากฎของแก๊ส

$$PV = RT$$

$$\Rightarrow \underset{\text{ความดัน}}{P} = \frac{RT \leftarrow \text{อุณหภูมิ}}{V \leftarrow \text{ปริมาตร}}$$

ให้ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ และ $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

ถ้า เราตรึง $x = x_0$ จะได้ว่า $f(x_0,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร $y$ ที่หาได้ หาอนุพันธ์

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f'(x_0,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y+\Delta y) - f(x_0,y)}{\Delta y}$$

และเราเรียกว่า อนุพันธ์ย่อยของ $f$ เทียบ $y$

อนุพันธ์ย่อยของ $f$ เทียบ $x$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $z = f(x,y) = x^2+3xy-y^2$
จงหาค่าของ $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ โดยใช้นิยาม

วิธีทำ จะหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ กำหนดให้ $y$ เป็นค่าคงตัว

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)y-y^2]-[x^2+3xy-y^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2}+2x\Delta x+(\Delta x)^2+\cancel{3xy}+3y\Delta x\cancel{-y^2}\cancel{-x^2}\cancel{-3xy}\cancel{+y^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+3y\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x+\Delta x+3y$$

$$= 2x+3y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \cdots = 3x-2y$$

□

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ถ้า $z = f(x,y) = y\sin xy$

วิธีทำ กำหนดให้ $x$ เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \sin xy\right)$$

$$= y\frac{\partial (\sin xy)}{\partial y} + (\sin xy)\frac{\partial (y)}{\partial y}$$

$$= y(\cos xy)\frac{\partial (xy)}{\partial y} + (\sin xy)(1) = xy\cos xy + \sin xy \quad \square$$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ของ $f(x,y) = \frac{2y}{y+\cos x}$

วิธีทำ กำหนดให้ $y$ เป็นค่าคงที่

พิจารณา

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)$$

ฝึก! จงหาค่าของ $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ของ $f$ กำหนดดังนี้

(1) $f(x,y) = (x^2 + 5x - 2y^3)^{-4/3}$

(2) $f(x,y) = x e^{\sqrt{15xy^2}}$

(3) $f(x,y) = \sin(5x^3y + 7xy^2)$

(4) $f(x,y) = \cos(2xy^2 - 3x^2y^2)$

(5) $f(x,y) = x^y$

(6) $f(x,y) = \log_y x$

(7) $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+y)$

(8) $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

(9) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

(10) $f(x,y) = (y^2\tan x)^{-4/5}$