ตัวอย่าง: ให้ $u = f(x,y,z) = x\sin(y+3z)$

จงหาค่าของ f_x, f_y, f_z

วิธีทำ "หา $\frac{\partial f}{\partial x}$ ให้มอง y และ z เป็นค่าคงตัว"

$$f_x = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sin(y+3z)\right)$$

$$= \left(\sin(y+3z)\right)\frac{\partial x}{\partial x} = \sin(y+3z)$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\sin(y+3z)\right)$$

$$= \left(x\cos(y+3z)\right)\frac{\partial (y+3z)}{\partial y}$$

$$= x\cos(y+3z)$$

$$f_z = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x\sin(y+3z)\right)$$

$$= \left(x\cos(y+3z)\right)\frac{\partial (y+3z)}{\partial z}$$

$$= 3x\cos(y+3z) \qquad \square$$

<u>ตัวอย่าง</u>: กำหนดให้ $f(x,y,z) = \ln(x^2 y \cos z)$
จงหาค่าของ f_x, f_y และ f_z

<u>วิธีทำ</u> คิดตรง

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2 y \cos z)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2 y \cos z}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y \cos z)$$

$$= \frac{2x\cancel{y}\,\cancel{\cos z}}{x^{\cancel{2}}\cancel{y}\,\cancel{\cos z}} = \frac{2}{x}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x^2 y \cos z)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2 y \cos z}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y \cos z)$$

$$= \frac{x^2 \cos z}{x^2 y \cos z} = \frac{1}{y}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\ln(x^2 y \cos z)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2 y \cos z}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 y \cos z)$$

$$= \frac{x^2 y}{x^2 y \cos z}\frac{\partial}{\partial z}(\cos z)$$

$$= \frac{-x^2 y \sin z}{x^2 y \cos z} = -\tan z \qquad \square$$

Recall: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2x + 2$$

$$f''(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+2) = 2$$

3.6 อนุพันธ์อันดับสูง

พิจารณา $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$z = f(x,y)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_x \to (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_x \to (f_x)_y = f_{xy}$$

$$f_y \to (f_y)_x = f_{yx}, \quad f_y \to (f_y)_y = f_{yy}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad\qquad = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u>: กำหนดให้ $f(x,y) = x^2y^3 + x^4\cos y$

จงหา 1) f_{xx} 2) f_{xy} 3) f_{yx} 4) f_{yy}

5) f_{xxy} 6) f_{yyx} 7) f_{xyx} 8) f_{xxxx}

<u>วิธีทำ</u> 1) $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

พิจารณา $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3 + x^4\cos y\right) = 2xy^3 + 4x^3\cos y$

$\Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^3 + 4x^3\cos y\right) = 2y^3 + 12x^2\cos y$

2) $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3 + 4x^3\cos y\right)$

$= 6xy^2 - 4x^3\sin y$

3.), 4.) ฝาก!

5) $f_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(2y^3 + 12x^2\cos y\right)$$

$$= 6y^2 - 12x^2\sin y$$

6.)-7) ฝาก!

8) $$f_{xxxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{xx}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(2y^3 + 12x^2\cos y\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(24x\cos y\right)$$

$$= 24\cos y$$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u>: กำหนดให้ $u = f(w, x, y, z) = xe^{yw}\sin^2 z$

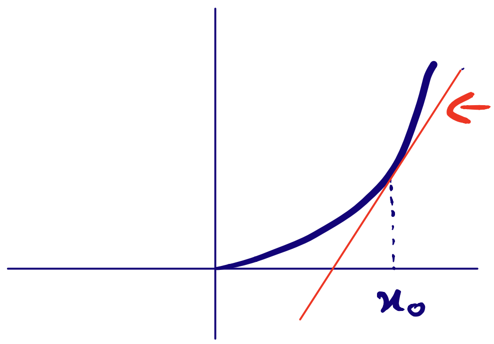
จงหา f_x, f_y, f_w, f_z, f_{zwyx}, f_{yyzw}

(ฝาก!)

- ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อย

พิจารณา $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $x_0 \in \mathbb{R}$

เราทราบว่า $f'(x_0)$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน f เทียบ x ณ จุด x_0



และเราจะกล่าวว่า ความชันของ
เส้นโค้ง ณ จุด x_0 คือ ความชัน
ของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง ณ จุด x_0