ทฤษฎีบท: ให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$ Jum!

ตัวอย่าง: จงหา $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

วิธีทำ พิจารณา $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$

มีหลือ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ส่งผลให้ $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ $\square$

ทฤษฎีบท: ให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ที่

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$ Jum!

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

ตัวอย่าง: จงหา $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

วิธีทำ รู้ $-1 \le \cos n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{n}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{\cos n}{n}}_{b_n} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{c_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$

วิธีทำ Note! $n \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{0}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{b_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{c_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n^2}$

วิธีทำ ดังนั้น $\left|\frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n^2}\right| = \frac{|(-1)^{n+1}||\sin n|}{|n^2|}$

$$= \frac{1|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{0}_{a_n} \le \underbrace{\left| \frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n^2} \right|}_{b_n} \le \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{c_n}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

และ $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$$\Big\| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n^2} \right| = 0$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n^2} = 0$ $\square$

<u>ทฤษฎีบท</u>: ให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ที่

$$a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$+\infty$

$a_n \le b_n$

$-\infty$

จะได้ว่า

✓ ① ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

② ถ้า $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหา $\lim_{n\to\infty} n^2(2+\sin n)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sin n \ge -1$

$$\Rightarrow \quad 2+\sin n \ge 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{n^2(2+\sin n)}_{b_n} \ge \underbrace{n^2}_{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ จึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} n^2(2+\sin n) = +\infty$$

$\square$

ทฤษฎีบท: ให้ $r \in \mathbb{R}$

① ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

② ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$

③ ถ้า $r = 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

Jum!

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 10^n - 5^n + 9\cdot 3^n}{7\cdot 2^n\cdot 5^n + 10^n - 1}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 10^n - 5^n + 9\cdot 3^n}{7\cdot 2^n\cdot 5^n + 10^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 10^n - 5^n + 9\cdot 3^n}{8\cdot 10^n - 1}$$

Fact!

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{10^n}\left(2 - \frac{5^n}{10^n} + 9\cdot\frac{3^n}{10^n}\right)}{\cancel{10^n}\left(8 - \frac{1}{10^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2 - \cancel{\left(\frac{5}{10}\right)^n}^{\,0} + 9\cancel{\left(\frac{3}{10}\right)^n}^{\,0}\right)}{\left(8 - \cancel{\left(\frac{1}{10}\right)^n}^{\,0}\right)}$$

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+2}-4^{n-2}}{7^{n-1}+3^{n}}$

วิธีทำ $$\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+2}-4^{n-2}}{7^{n-1}+3^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(7^2\cdot 7^n - \frac{4^n}{4^2}\right)}{\left(\frac{7^n}{7} + 3^n\right)}$$

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{7^n}\left(7^2 - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{4^n}{7^n}\right)}{\cancel{7^n}\left(\frac{1}{7} + \frac{3^n}{7^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^2 - \frac{1}{4^2}\underbrace{\left(\frac{4}{7}\right)^n}_{0}}{\frac{1}{7} + \underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)^n}_{0}}$$

$$= \frac{7^2}{1/7} = 7^3$$

□