ทฤษฎี! Clairaut's Theorem

ถ้า $f(x,y)$ และอนุพันธ์ย่อย f_x, f_y, f_{xy} และ f_{yx} หาค่าได้ สำหรับทุกจุดบนแผ่นกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (x_0,y_0) และฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ (x_0,y_0)

แล้ว

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ เมื่อ $f(x,y) = xy + \dfrac{e^y}{y^2+1}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \frac{e^y}{y^2+1}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

$\square$

3.7 ผลต่างอนุพันธ์รวม (Total Differentials)

ทฤษฎี! $y = f(x)$

• ส่วนเปลี่ยนแปลงของ f เทียบ x คือ

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

• ผลต่างอนุพันธ์ของ f เทียบ x คือ

$$df = f'(x)\Delta x \qquad (*)$$

<u>ประโยชน์</u>: $df \approx \Delta f$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงประมาณค่าของ $\sqrt{0.99}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$f(\underline{x+\Delta x}) - f(x) = f'(x)\Delta x \quad ✓$$

$$x+\Delta x = 0.99 \Rightarrow x = 1 \qquad \Delta x = -0.01$$

และ $f(x) = \sqrt{x}$

ดังนั้น $\sqrt{0.99} = f(0.99)$

$$= f(1+(-0.01)) \; - ?$$

จากสูตร $f(x+\Delta x) \approx f(\underbrace{x}_{1}) + f'(\underbrace{x}_{1})\underbrace{\Delta x}_{(-0.01)}$

เพราะว่า $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d(\sqrt{x})}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{0.99} = f(1+(-0.01))$

$$= f(1) + f'(1)(-0.01)$$

$$= \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0.01)$$

$$= 1 + (-0.005)$$

$$= 0.995$$

□

จงหาค่าของ $0.98e^{1.02} = ?$

บทนิยาม: ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า Δx เป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของ x และ Δy เป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของ y แล้ว ส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน f คือ

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

และ ผลต่างอนุพันธ์รวม (total differential) ของ f คือ

$$df = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

ทั้งนี้ เราสามารถประมาณค่า Δf ได้ด้วย df

$$\Delta f \approx df$$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ จงหา ส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน f และผลต่างอนุพันธ์ของ f เมื่อ $x=3, y=4$ โดยที่ $\Delta x = 0.01$ และ $\Delta y = -0.02$

วิธีทำ

รู้! $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = df$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

พิจารณา $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x)$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

และ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ดังนั้น ส่วนเปลี่ยนแปลงของ f คือ

$$(*)\quad f(3+(0.01),\ 4+(-0.02)) - f(3,4) \approx f_x(3,4)(0.01) + f_y(3,4)(-0.02)$$

$$= \frac{3(0.01)}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{4(-0.02)}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$= \frac{0.03-0.08}{5}$$

$$= \frac{-0.05}{5} = -0.01$$

ความยาวของ $\sqrt{(3.01)^2+(3.98)^2}$

ดังนั้น $\sqrt{(3.01)^2+(3.98)^2} = \sqrt{(3+(0.01))^2+(4+(-0.02))^2}$

$$\approx f(3,4) + (-0.01)$$

$$= \sqrt{3^2+4^2} + (-0.01)$$

$$= 5 - 0.01 = 4.99$$

□

ตัวอย่าง : จงหาผลต่างอนุพันธ์รวมของ $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$

วิธีทำ พิจารณา

$$df = f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

$$\Rightarrow \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x + x \ln y + y \ln x\right) dx$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x + x \ln y + y \ln x\right) dy$$

$$= \left(e^x + \ln y + \frac{y}{x}\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right) dy$$

$\square$

ตัวอย่าง: จงหาผลต่างอนุพันธ์รวมของ

$$f(x,y,z) = e^{3x+4y} \cos 5z$$

วิธีทำ Note! $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

ฝาก! จงใช้ผลต่างอนุพันธ์รวมประมาณค่า $\ln\left(\overset{x+\Delta x}{\underline{1.01}}\right)\left(\overset{y+\Delta y}{\underline{2.02}}\right)$

วิธีทำ รู้! $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

KNOW! $f(x,y) = \ln xy$

$x = 1$ $\qquad\qquad$ $\Delta x = 0.01$

$y = 2$ $\qquad\qquad$ $\Delta y = 0.02$

ดังนั้น $\ln(1.01)(2.02) = \ln(1+(0.01))(2+(0.02))$

$$= \ln(1)(2) + f_x(1,2)(0.01) + f_y(1,2)(0.02)$$

$$\approx \ldots$$

$$\approx 0.7231$$

ตัวอย่าง: กำหนดให้ปริมาตรของกรวยกลม รัศมี r หน่วย และสูง h หน่วย คือ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ถ้ารัศมีของกรวยกลมเพิ่มขึ้นจาก 4 หน่วย เป็น 4.05 หน่วย และส่วนสูงลดลงจาก 20 หน่วย เป็น 19.95 หน่วย จงหา

1. ส่วนเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยนี้
2. ปริมาตรของกรวย ณ ปัจจุบัน

วิธีทำ รู้! $df = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

คิดจาก ส่วนเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกรวยนี้ คือ

$$dV = V_r(r,h)\Delta r + V_h(r,h)\Delta h$$

KNOW! $r = 4$ $\qquad \Delta r = 0.05$

$h = 20$ $\qquad \Delta h = -0.05$

ดังนั้น ส่วนเปลี่ยนแปลงของปริมาตร คือ

$$dV = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)\Delta r + \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)\Delta h$$

$$= \frac{2}{3}\pi r h \Delta r + \frac{1}{3}\pi r^2 \Delta h$$

$$= \frac{2}{3}\pi \times 4 \times 20 \times 0.05 + \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times (-0.05)$$

$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{0.8\pi}{3} = \frac{7.2\pi}{3} \text{ ลบ.ม.}$$

@ $V(4.05, 19.95) = ?$

KNOW! $V(r+\Delta r, h+\Delta h) = V(r,h) + dV$

$$= V(4,20) + \frac{7.2\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 20 + \frac{7.2\pi}{3}$$

$$= \frac{(320+7.2)\pi}{3}$$

$$= \frac{327.2\pi}{3} \text{ ลบ.ม.}$$

□

ตัวอย่าง: เราทราบว่าลูกตุ้มอย่างง่าย สามารถคำนวณค่าคาบได้โดย

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

โดยที่ L คือความยาวของลูกตุ้ม และ g คือค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

สมมติว่า ทำการวัดค่า L และค่า g มีความคลาดเคลื่อนได้มากที่สุด 0.5% และ 0.1% ตามลำดับ

จงหาร้อยละความคลาดเคลื่อนอย่างมากที่สุดในการคำนวณค่าคาบนี้

วิธีทำ KNOW! $dT = \frac{\partial T}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial T}{\partial g}\Delta g$

$L = 100$ $\Delta L = 0.5$

$g = 100$ $\Delta g = 0.1$

พิจารณา $$\frac{\partial T}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\sqrt{\frac{L}{g}}}\frac{1}{g} = \frac{\pi}{g\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

และ $$\frac{\partial T}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{L}{g}}}\left(-\frac{L}{g^2}\right) = \frac{-\pi L}{g^2\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

ดังนั้น

$$dT = \frac{\partial T(L,g)}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial T(L,g)}{\partial g}\Delta g$$

$$= \frac{\pi(\Delta L)}{100\cancel{\sqrt{\frac{100}{100}}}} + \left(\frac{-100\pi}{100^2\cancel{\sqrt{\frac{100}{100}}}}\right)(\Delta g)$$

$$= \frac{\pi}{100}(\Delta L - \Delta g)$$

$(100,100)$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{100}{100}}$

$= 2\pi$

Case I: $\Delta L = -0.5, \Delta g = -0.1 \Rightarrow \frac{-0.5-(-0.1)\pi}{100}$

$= -\frac{0.4\pi}{100}$

$\Rightarrow \frac{\frac{-0.4\cancel{\pi}}{\cancel{100}}}{2\cancel{\pi}} \times \cancel{100} = -0.2$

Sol: $= 0.3$

Case II: $\Delta L = -0.5, \Delta g = 0.1 \Rightarrow dT = \frac{-0.5-0.1\pi}{100} = -\frac{0.6\pi}{100}$

$\Rightarrow \frac{\frac{-0.6\cancel{\pi}}{\cancel{100}}}{\cancel{2\pi}} \times \cancel{100} = -0.3$

Case III: $\Delta L = 0.5, \Delta g = -0.1 \Rightarrow dT = \frac{0.5-(-0.1)\times\pi}{100} = \frac{0.6\pi}{100}$

$\Rightarrow \frac{\frac{0.6\cancel{\pi}}{\cancel{100}}}{2\cancel{\pi}} \times \cancel{100} = 0.3$

Case IV: $\Delta L = 0.5, \Delta g = 0.1 \Rightarrow dT = \frac{(0.5-0.1)\pi}{100} = \frac{0.4\pi}{100}$

$\Rightarrow \frac{\frac{0.4\cancel{\pi}}{\cancel{100}}}{} \times \cancel{100} = 0.2$


2π