3.10 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร
(Maxima and Minima of functions of two variables)

<u>บทนิยาม:</u> ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) เราจะกล่าวว่า

(i) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum / local minimum) ที่ (x_0,y_0) ถ้ามีแผ่นกลม B ที่จุดศูนย์กลางที่ (x_0,y_0) ซึ่งทำให้

$$f(x_0,y_0) \le f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B$$

(ii) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum / local maximum) ที่ (x_0,y_0) ถ้า มีแผ่นกลม B ที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x_0,y_0) ซึ่งทำให้

$$f(x_0,y_0) \ge f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B$$

(iii) f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) ที่ (x_0,y_0) ถ้า f มีค่าต่ำสุด หรือสูงสุด สัมพัทธ์ที่ (x_0,y_0)

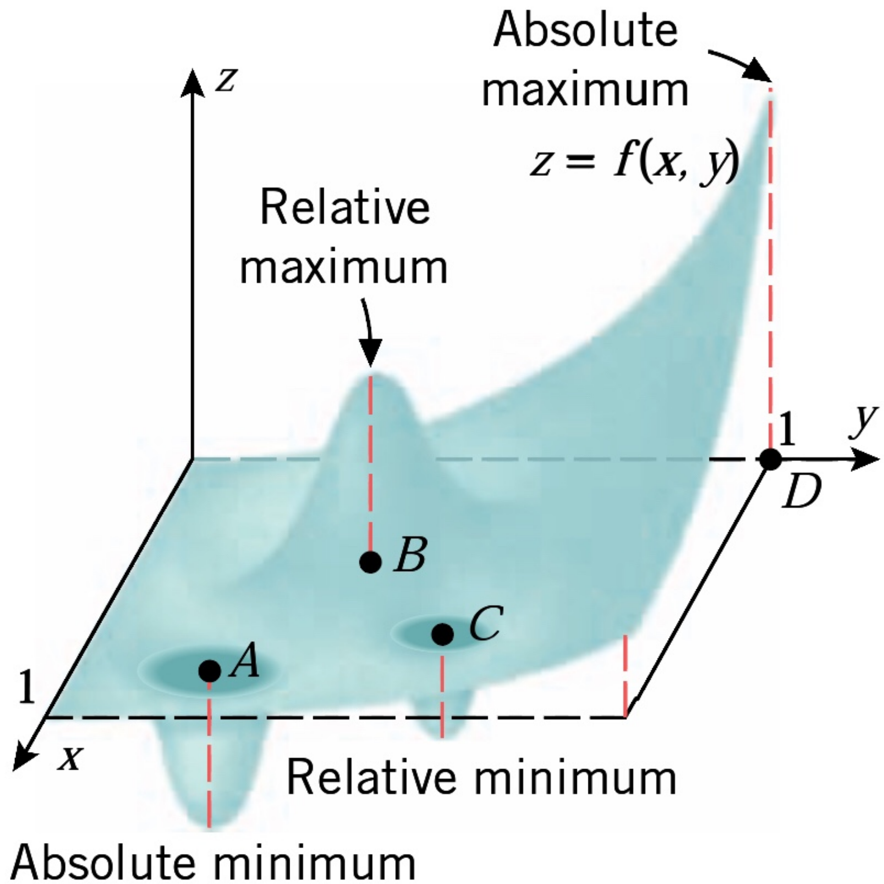
(iv) f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ที่ (x_0,y_0) ถ้า

$$f(x_0,y_0) \le f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$

(v) f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ที่ (x_0,y_0) ถ้า

$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$

(vi) f มีค่าสุดขีด (สัมบูรณ์) (absolute extremum) ที่ (x_0,y_0) ถ้า f มีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดสัมบูรณ์ที่ (x_0,y_0)



นิยาม: ให้ $f: D \to \mathbb{R}$ และ $(x_0,y_0) \in D$ เราจะกล่าวว่า (x_0,y_0) เป็นจุดวิกฤต (critical point) ของ f ถ้า

(1) $f_x(x_0,y_0) = 0$ และ $f_y(x_0,y_0) = 0$

(2) $f_x(x_0,y_0)$ หรือ $f_y(x_0,y_0)$ หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบท: ให้ $f: D \to \mathbb{R}$ และ $(x_0, y_0) \in D$
ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0) แล้ว (x_0, y_0) เป็นจุดวิกฤตของ f

ตัวอย่าง: จงหาจุดวิกฤต (ถ้ามี) ของ

(1) $f(x,y) = x^2+y^2$

(2) $f(x,y) = 1-x^2-y^2$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(4) $f(x,y) = x^2-y^2$

วิธีทำ (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = 2y$

$\Rightarrow \quad f_x(x_0,y_0) = 0$ และ $f_y(x_0,y_0) = 0$

$\Rightarrow \quad 2x_0 = 0$ และ $2y_0 = 0$

$\Rightarrow \quad (x_0,y_0) = (0,0)$

(2) $0 = \frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ และ $0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$\Rightarrow x = 0$ และ $y = 0 \Rightarrow (x_0,y_0) = (0,0)$

(3) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

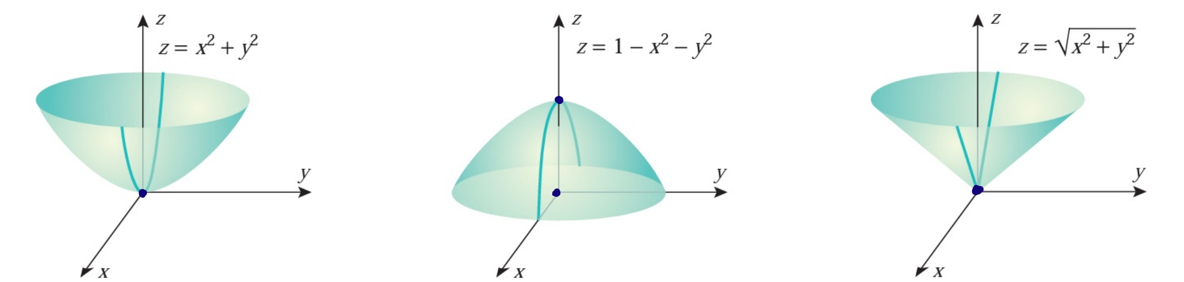
$\Rightarrow$ $(0,0)$ ทำให้ฟังก์ชันหาค่าไม่ได้

$\Rightarrow$ $(0,0)$ เป็นจุดวิกฤต

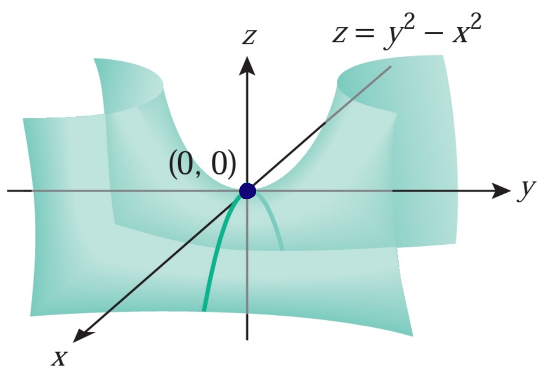
(4) $0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x$ และ $0 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y$

$\Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

$\Rightarrow (0, 0)$ เป็นจุดวิกฤต



$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ relative and absolute min at (0, 0)	$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ relative and absolute max at (0, 0)	$f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$ do not exist relative and absolute min at (0, 0)
(*a*)	(*b*)	(*c*)



The function $f(x, y) = y^2 - x^2$ has neither a relative maximum nor a relative minimum at the critical point (0, 0).

บทนิยาม: ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $(x_0, y_0) \in D$ เราจะกล่าวว่า (x_0, y_0) เป็นจุดอานม้า (saddle point) ของ f ถ้า f ไม่มีค่าสูงสุด และต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0)

ทฤษฎีบท: การทดสอบด้วยอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดวิกฤตของ f

ถ้า ① $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ หาค่าได้และต่อเนื่องที่แผ่นกลมรอบจุด (x_0, y_0)

และ ② กำหนดให้

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

จะได้ว่า

① ถ้า $\Delta(x_0,y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0,y_0)

(2) ถ้า $\Delta(x_0,y_0) > 0$ และ $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0,y_0)

(3) ถ้า $\Delta(x_0,y_0) < 0$ แล้ว (x_0,y_0) เป็นจุดอานม้า

(4) ถ้า $\Delta(x_0,y_0) = 0$ แล้วสรุปไม่ได้เกี่ยวกับจุดวิกฤตนี้

<u>ตัวอย่าง</u>: จงหาจุดวิกฤตของ $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$ และจงระบุว่าจุดวิกฤตดังกล่าวเป็นจุดที่ f มีค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือเป็นจุดอานม้า

<u>วิธีทำ</u> ① หาจุดวิกฤต (x_0,y_0)

② $\Delta(x_0,y_0)$ และ $f_{xx}(x_0,y_0)$

① พิจารณา $0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2xy + y^2 - 8y)$

$$= 6x - 2y$$

และ $0 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy + y^2 - 8y)$

$$= -2x + 2y - 8$$

$\Rightarrow x = 2$ และ $y = 6$

$\Rightarrow$ จุดวิกฤตคือ $(2,6)$

② $f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 2y) = 6$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 2y) = -2$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x + 2y - 8) = -2$$

และ $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-2x + 2y - 8) = 2$

ดังนั้น

$$\Delta(2,6) = \begin{vmatrix} f_{xx}(2,6) & f_{xy}(2,6) \\ f_{yx}(2,6) & f_{yy}(2,6) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

เนื่องจาก $\Delta(2,6) = 8 > 0$ และ $f_{xx}(2,6) = 6 > 0$

สรุปได้ว่า $(2,6)$ เป็นจุดที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $\square$

ตัวอย่าง: จงหาจุดวิกฤตของ $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$ และจงระบุว่าจุดวิกฤตดังกล่าวนี้ให้ค่าต่ำสุด/สูงสุดสัมพัทธ์หรือเป็นจุดอานม้า

วิธีทำ หาจุดวิกฤต

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3 \qquad 4y - 4x^3 = 0$$

และ

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3 \qquad 4x - 4y^3 = 0$$

$$\Rightarrow y = x^3 \text{ และ } x = y^3 \Rightarrow y = (y^3)^3 = y^9$$

$$\Rightarrow y^9 - y = 0 \Rightarrow y(y^8 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ และ } y^8 = 1$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ และ } y = -1, 1$$

จะได้จุดวิกฤตคือ

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$y = -1 \Rightarrow x = (-1)^3 = -1 \Rightarrow (-1,-1)$$

$$y = 1 \Rightarrow x = (1)^3 = 1 \Rightarrow (1,1)$$

พิจารณา
$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(4y - 4x^3) = -12x^2$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(4y - 4x^3) = 4$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 4y^3) = 4$$

∂x

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(4x-4y^3) = -12y^2$$

ฟังก์ชัน $\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} -12x_0^2 & 4 \\ 4 & -12y_0^2 \end{vmatrix} = 144x_0^2y_0^2 - 16$

พิจารณา $(0,0) \Rightarrow \Delta(0,0) = 144 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - 16 = -16 < 0$

สรุปได้ว่า $(0,0)$ เป็นจุดอานม้า