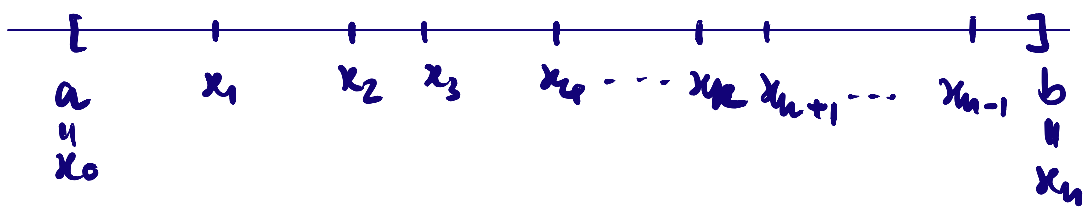
บทที่ 5
อินทิกรัล
(Integral)

5.1 Riemann Integral:

<u>บทนิยาม:</u> ให้ $[a,b]$ เป็นช่วงปิดใน $\mathbb{R}$

• เราจะกล่าวว่า $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ว่าเป็นผลแบ่งกั้น (partition) ของ $[a,b]$ ถ้า

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$

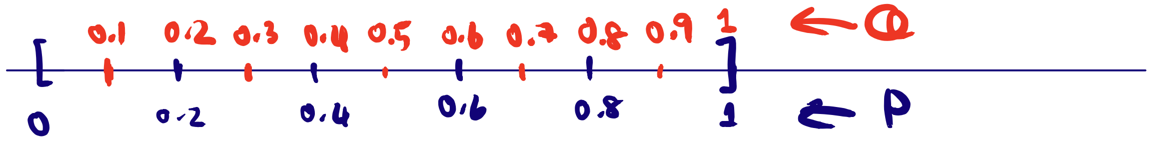


• ให้ P และ Q เป็น partition ของ $[a,b]$
ถ้า $P \subseteq Q$ แล้ว จะกล่าวว่า Q เป็นผลแบ่งกั้นละเอียดขึ้น (refinement) ของ P

<u>ตัวอย่าง:</u> $[a,b] = [0,1]$

$$P = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

$$Q = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$



จะได้ว่า Q เป็น refinement ของ P

<u>บทนิยาม</u>! ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a,b]$ และให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็น partition ของ $[a,b]$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, n$

$$M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

และ

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

และ กำหนดให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, n$

เรานิยาม ผลบวกบน (upper sum) ของ f w.r.t. P โดย

with respect to

$$U(f,P) := \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\,\Delta x_i$$

และ เรานิยาม ผลบวกล่าง (lower sum) ของ f w.r.t. P โดย

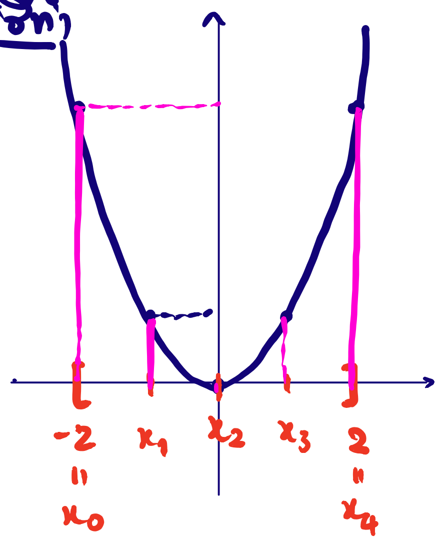
$$L(f,P) := \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\,\Delta x_i$$

ตัวอย่าง: ให้ $f(x) = x^2$ บน $[-2,2]$

และ: $P = \{-2,-1,0,1,2\}$, $Q = \{-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2\}$

จงหา $U(f,P)$ และ $L(f,P)$

วิธีทำ



Note! $\Delta x_i = 1 \quad \forall i = 1,2,3,4$

หา $U(f,P)$:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{4} M_i(f)\Delta x_i$$

$M_1(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_0, x_1]\}$
$= 4$

$M_2(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}$
$= 1$

$M_3(f) = 1 \qquad M_4(f) = 4$

ดังนั้น $U(f,P) = 4(1) + 1(1) + 1(1) + 4(1) = 10$

หา $L(f,P) = \sum_{i=1}^{4} m_i(f)\Delta x_i$

$m_1(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_0, x_1]\}$
$= 1$

$m_2(f) = 0$

$m_3(f) = 0$

$m_4(f) = 1$

ดังนั้น $L(f,P) = 1(1) + 0(1) + 0(1) + 1(1) = 2$

และ (ฝาก!) จะได้ว่า $L(f,Q) = 3.5$ และ $U(f,Q) = 7.5$

หากพิจารณาตัวอย่างนี้ เราจะพบว่า $P \subset Q$ และ:

$$L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$$

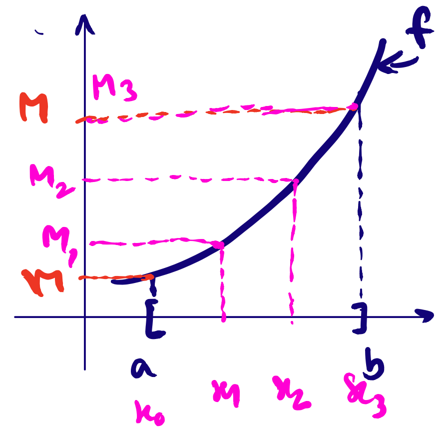
D

บทแทรก : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a,b]$ นั่นคือ มี $m, M \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $m \le f(x) \le M$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ และ P เป็น partition ของ $[a,b]$ จะได้ว่า

$$m(b-a) \le L(f,P) \le U(f,P) \le M(b-a)$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็น partition ของ $[a,b]$

สังเกต สำหรับแต่ละ $i = 1, \dots, n$ จะได้ว่า



$$M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \le M$$

และ

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ge m$$

นั่นคือ

$$m \le m_i(f) \le M_i(f) \le M, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow$

$$m\Delta x_i \le m_i(f)\Delta x_i \le M_i(f)\Delta x_i \le M\Delta x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i$$

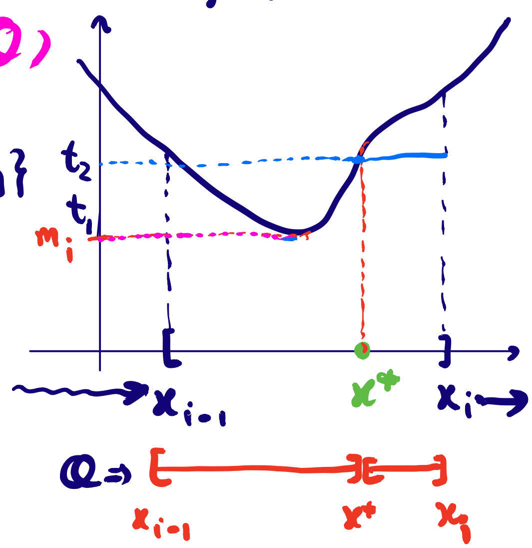
$$\Rightarrow \underbrace{m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i}_{= m(b-a)} \le L(f,P) \le U(f,P) \le \underbrace{M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i}_{= M(b-a)}$$

ทฤษฎีบท: ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a,b]$
ถ้า P และ Q เป็น partition ของ $[a,b]$ และ Q เป็น refinement ของ P แล้ว

$$L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$$

พิสูจน์ ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็น partition ของ $[a,b]$
และให้ $Q = P \cup \{x^*\}$ โดยที่ $x^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $\exists\, i = 1, \dots, n$

เราจะแสดงว่า $L(f,P) \le L(f,Q)$



พิจารณา

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

และ

$$t_1 = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x^*]\}$$

และ

$$t_2 = \inf\{f(x) : x \in [x^*, x_i]\}$$

จะได้ว่า

$$t_1 \ge m_i \quad \text{และ} \quad t_2 \ge m_i \quad \text{——} \quad (*)$$

พิจารณา

$$L(f,Q) - L(f,P) \qquad [\ge 0]$$

$$= \cancel{\sum_{j=1}^{i-1} m_j(f)\Delta x_j} + t_1(x^* - x_{i-1}) + t_2(x_i - x^*) + \cancel{\sum_{j=i+1}^{n} m_j(f)\Delta x_j}$$

$$- \left(\cancel{\sum_{j=1}^{i-1} m_j(f)\Delta x_j} + m_i(f)\Delta x_i + \cancel{\sum_{j=i+1}^{n} m_j(f)\Delta x_j} \right)$$

$$= t_1(x^*-x_{i-1}) + t_2(x_i - x^*) - m_i(f)\Delta x_i$$

$$= t_1(x^*-x_{i-1}) + t_2(x_i - x^*) - m_i(f)(x^*-x_{i-1}) - m_i(f)(x_i - x^*)$$

$$= \underbrace{(t_1 - m_i(f))}_{\geq 0}\underbrace{(x^* - x_{i-1})}_{\geq 0} + \underbrace{(t_2 - m_i(f))}_{\geq 0}\underbrace{(x_i - x^*)}_{\geq 0} \geq 0$$

ฝาก! $U(f,Q) \leq U(f,P)$ *(30)

<u>บทนิยาม:</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a,b]$

- ปริพันธ์บน (upper integral) ของ f บน $[a,b]$ คือ

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\{U(f,P) : P \text{ เป็น partition ของ } [a,b]\}$$

- ปริพันธ์ล่าง (lower integral) ของ f บน $[a,b]$ คือ

✓ $$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) : P \text{ เป็น partition ของ } [a,b]\}$$

- ถ้า $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b}$ แล้ว เราจะกล่าวว่า f เป็น Riemann integrable function บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท: ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a,b]$

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

พิสูจน์: ให้ P และ Q เป็น partition ของ $[a,b]$

$\Rightarrow P \cup Q$ เป็น partition ของ $[a,b]$ (Why?!)

[$P \subseteq Q$ $\quad L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$]

Note! $P \cup Q$ เป็น refinement ของ P และ Q

$$L(f,P) \le L(f,P\cup Q) \le U(f,P\cup Q) \le U(f,Q)$$

กำหนดให้ $S = \{L(f,P) : P \text{ เป็น partition ของ } [a,b]\}$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup S \le U(f,Q)$$

กำหนดให้ $R = \{U(f,Q) : Q \text{ เป็น partition ของ } [a,b]\}$

$$\underline{\int_a^b} f \le \inf R = \overline{\int_a^b} f$$

$\square$

ทฤษฎีบท: ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a,b]$ จะได้ว่า

f เป็น Riemann integral บน $[a,b]$

ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี partition P ของ $[a,b]$ ที่ทำให้

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ f เป็น Riemann integrable บน $[a,b]$

นั่นคือ

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

ให้ $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) : P \text{ เป็น partition ของ } [a,b]\}$

นั่นคือ จะมี partition P_1 ของ $[a,b]$ ที่ทำให้

$$L(f,P_1) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$$

และ ดังนั้น $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) : P \text{ เป็น partition ของ } [a,b]\}$

ซึ่งคือ จะมี partition P_2 ของ $[a,b]$ ที่ทำให้

$$U(f,P_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

กำหนดให้ $P := P_1 \cup P_2$ จะได้ว่า P เป็น partition ของ $[a,b]$ และเป็น refinement ของ P_1 และ P_2 ด้วย ซึ่งคือ

$$L(f,P_1) \le L(f,P) \le U(f,P) \le U(f,P_2)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\le U(f,P_2) - L(f,P_1) \\ &< \left(\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \underbrace{\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f}_{=0} + \frac{2\varepsilon}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) สมมติให้ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี partition P ของ $[a,b]$ ที่ทำให้

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

จะแสดงว่า $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$ $\quad [a \le b \iff a < b + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0]$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นจะมี partition P ของ $[a,b]$ ที่ทำให้

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f \leqslant U(f,P) < L(f,P) + \varepsilon$$

$$\leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$$

$\square$