บทที่ 4
อนุพันธ์

4.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

บทนิยาม: เป็นฟังก์ชัน ให้ $I \subset \mathbb{R}$ และ $c \in I$ และให้ $f : I \to \mathbb{R}$

• เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ (differentiable function) ที่จุด c ถ้าค่าลิมิต

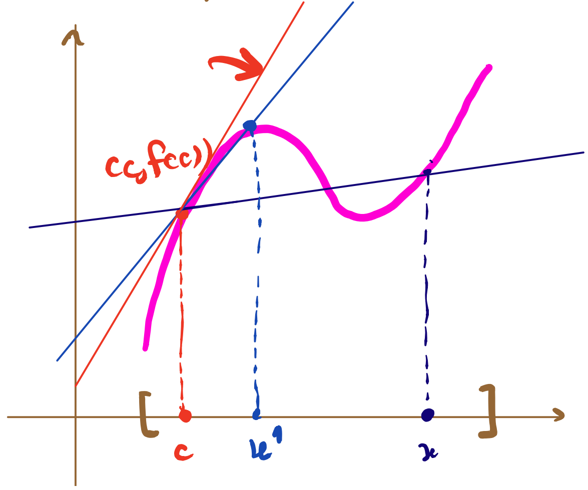
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \left[=: f'(c) \right]$$

ลิมิตหาค่าได้

มีจริง (และเป็นจำนวนจริง)

• ให้ $S \subset I$ เราจะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้บน S ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน S และเราจะเรียกฟังก์ชัน $f' : S \to \mathbb{R}$ ว่าอนุพันธ์ของ f บน S

พิจารณา $f : I \to \mathbb{R}$



ตัวอย่าง: กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ จงหา $f'(x_0)$ เมื่อ x_0 เป็นจุดใดๆ ใน $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

วิธีทำ

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

พิจารณา เมื่อ $x_0 \geq 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

พิจารณา เมื่อ $x_0 < 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 - (-x_0^2)}{x - x_0} = -(x + x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -(x + x_0) = -2x_0$$

$\square$

ทฤษฎีบท: ให้ $I \subset \mathbb{R}$ เป็นช่วงใดๆ และ $c \in I$ และ $f: I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุกลำดับ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ ที่ $s_n \neq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n \to \infty} s_n = c$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c} \text{ หาค่าได้}$$

$$\|$$

$$f'(c)$$

พิสูจน์ (ฝาก!) $\square$

ฝาก! จงแสดงว่า $f(x) = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ เมื่อ $x = 0$

[Hint! $s_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$?]

ทฤษฎีบท: (Continuity of Differentiable function)

ให้ $I \subset \mathbb{R}$ และ $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c

พิสูจน์ สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ที่ c

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ ที่ $s_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n\to\infty} s_n = c$

จะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(c)$

เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ที่จุด c จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c} = f'(c)$$

พิจารณา สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$f(s_n) = (s_n - c)\left(\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c}\right) + f(c)$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \to \infty} f(s_n) = \lim_{n \to \infty} (s_n - c)\left(\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c}\right) + \lim_{n \to \infty} f(c)$$

$$= \lim_{n \to \infty} (s_n - c) \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c}\right) + f(c)$$

$$= 0 \cdot f'(c) + f(c)$$

$$= f(c)$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c

$\square$

ทฤษฎีบท: (Algebraic Properties of Differentiable functions)

ให้ $I \subseteq \mathbb{R}$ และ $c \in I$ และ $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c จะได้ว่า

① ให้ $k \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า kf หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(kf)'(c) = k \cdot f'(c)$$

② $f+g$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$$

③ fg หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(fg)'(c) = f(c)g'(c)+g(c)f'(c)$$

④ ถ้า $g(x) \neq 0 \;\forall x \in I$ จะได้ว่า $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

และ

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

<u>พิสูจน์</u> (3) สมมติให้ f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ ที่ $s_n \neq c \;\forall n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n\to\infty} s_n = c$

จะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{(fg)(s_n)-(fg)(c)}{s_n - c}$ หาค่าได้

พิจารณาสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\frac{(fg)(s_n)-(fg)(c)}{s_n-c} = \frac{f(s_n)g(s_n)-f(c)g(s_n)+f(c)g(s_n)-f(c)g(c)}{s_n-c}$$

$$= \left(\frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c}\right)g(s_n)+\left(\frac{g(s_n)-g(c)}{s_n-c}\right)f(c)$$

เนื่องจาก f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c จึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c} = f'(c)$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(s_n)-g(c)}{s_n-c} = g'(c)$$

และเนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} g(s_n) = g(c)$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(fg)(s_n)-(fg)(c)}{s_n-c}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c}\right)g(s_n) + \left(\frac{g(s_n)-g(c)}{s_n-c}\right)f(c)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c}\right)\lim_{n\to\infty} g(s_n) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(s_n)-g(c)}{s_n-c}\right)f(c)$$

$$= f'(c)\cdot g(c) + g'(c)f(c)$$

$$= f(c)g'(c) + g(c)f'(c)$$

1), 2) และ 4) ผ่าน! $\square$