ทฤษฎีบท: Chain Rule

ให้ $I, J \subset \mathbb{R}$ และ $c \in I$ และ $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$
โดยที่ $f(I) \subset J$
ถ้า f is diff. at c และ g is diff. at $f(c)$ แล้ว
$g \circ f: I \to \mathbb{R}$ is diff. at c และ

$$(g\circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

พิสูจน์ ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ ที่ $s_n \neq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n\to\infty} s_n = c$
จะแสดงว่า

$$\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{(g\circ f)(s_n) - (g\circ f)(c)}{s_n - c} \text{ มีอยู่จริง} \right\}$$

เนื่องจาก f is diff. at c เราจึงได้ว่า f is cont. at c
นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(c)$ เนื่องจาก $f(I) \subset J$ จึงได้ว่า $(f(s_n))_{n\geq 1} \subset J$
เนื่องจาก g is diff. at $f(c)$ จึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(f(s_n)) - g(f(c))}{f(s_n) - f(c)} = g'(f(c))$$

นิยามฟังก์ชัน $h: J \to \mathbb{R}$ โดย

$$h(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)} & ; y \neq f(c) \\ g'(f(c)) & ; y = f(c) \end{cases}$$

จะแสดงว่า h is cont. ที่ $f(c)$

ให้ $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset J$ โดยที่ $y_n \neq f(c)\ \forall n \in \mathbb{N}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = f(c)$

พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} h(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(f(c))}{y_n - f(c)}$$

$$= g'(f(c)) = h(f(c))$$

เพราะฉะนั้น h is cont. at $f(c)$

จะแสดงว่า $h \circ f$ is cont. at c

ให้ $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ ที่ $s_n \neq c\ \forall n \in \mathbb{N}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = c$

พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} h\circ f(s_n) = \lim_{n\to\infty} h(f(s_n))$$

$$= h\left(\lim_{n\to\infty} f(s_n)\right) \quad [\because h \text{ is cont } f(c)]$$

$$= h\left(f\left(\lim_{n\to\infty} s_n\right)\right) \quad [\because f \text{ is cont. } c]$$

$$= h(f(c)) = h\circ f(c)$$

ดังนั้น $h \circ f$ is cont. at c

พิจารณา for each $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{g\circ f(s_n) - g\circ f(c)}{f(s_n) - f(c)} = h(f(s_n))$$

จะได้ว่า

$$\frac{g\circ f(s_n) - g\circ f(c)}{s_n - c} = \frac{g\circ f(s_n) - g\circ f(c)}{f(s_n) - f(c)} \cdot \frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c}$$

$$= h \circ f(s_n)\left(\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g\circ f(s_n) - g\circ f(c)}{s_n - c} = \lim_{n\to\infty} h\circ f(s_n) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\quad\, \| \\
&(g\circ f)'(c) \qquad &= h\circ f(c)\cdot f'(c) \\
& &= h(f(c))\cdot f'(c) \\
& &= g'(f(c))\cdot f'(c)
\end{aligned}$$

$\square$

4.2 ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean Value Theorem)

<u>ทฤษฎีบท</u>: Interior Extremum Theorem

ให้ f is diff. on (a,b)

ถ้า f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่จุด $c \in (a,b)$ แล้ว $f'(c) = 0$

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ f มีค่าสูงสุดที่จุด $c \in (a,b)$

นั่นคือ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$

[เพราะเราสร้างลำดับ $(s_n)_{n\geq} \subset (a,c)$ ที่ $s_n \to c$]

และ [เพราะเราสร้าง ลำดับ $(t_n) \subset (c,b)$ ที่ $t_n \to c$]

สังเกตว่า $a<c \Rightarrow c-a>0$ โดย Archimedean's Property
จะได้ว่า มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ $\frac{1}{n_0} < c-a$

ดังนั้น สำหรับทุก $n \geq n_0$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < c-a \implies a < \underbrace{c-\frac{1}{n}}_{s_n \ \forall n \in \mathbb{N}} < c \ \forall n \geq n_0$$

พิจารณา $(s_n)_{n\geq 1} \subset (a,c)$ และ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(c-\frac{1}{n}\right) = c$$

เนื่องจาก f is diff. at $c \in (a,b)$ โดย seq. crit. for diff.
จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c}}_{t_n} = \underbrace{f'(c)}_{t} \quad \text{—— ①}$$

เนื่องจาก $s_n < c \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_n - c < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
และเนื่องจาก $f(c) \geq f(s_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$
(Why?)

$$\Rightarrow f(s_n)-f(c) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(s_n)-f(c)}{s_n-c}}_{t_n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{—— ②}$$

$[\, t_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n\to\infty} t_n = t \Rightarrow t \geq 0 \,]$

จึงได้ว่า $f'(c) \geq 0$ [โดย ① และ ②]

ให้ดำเนินต่อ เนื่องจาก $c<b \Rightarrow b-c>0$

$$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{n_1} < b-c$$

ดังนั้น สำหรับทุก $n \geq n_1$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < b-c \quad \Rightarrow c < \underbrace{c+\frac{1}{n}}_{\substack{!! \\ t_n \ \forall n\in\mathbb{N}}} < b \quad \forall n \geq n_0$$

จะได้ว่า $(t_n)_{n\geq 1} \subset (c,b)$ และ $\lim_{n\to\infty} t_n = c$

เนื่องจาก f is diff. at c จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n)-f(c)}{t_n-c} = f'(c) \quad — ①'$$

เนื่องจาก $t_n > c \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow t_n - c > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น

$$f(t_n) \leq f(c) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(t_n)-f(c) \leq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{f(t_n)-f(c)}{t_n-c} \leq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad — ②'$$

จาก ①' และ ②' จึงสรุปได้ว่า $f'(c) \leq 0$

เพราะฉะนั้น $f'(c) = 0$

อีกกรณีที่เหลือ : ฝาก! $\square$

ทฤษฎีบท : (Rolle's Theorem)

ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ที่ $f'(c) = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $[a,b]$ เป็นเซตกระชับ
โดย Maximum-Minimum Theorem จะได้ว่า มี $\alpha, \beta \in [a,b]$
ที่ทำให้

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \quad \text{สำหรับทุก } x \in [a,b]$$

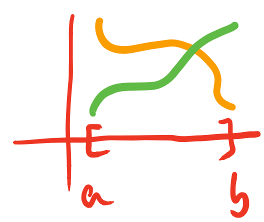
เพราะฉะนั้นแยกกรณีเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1: ถ้า α และ β เป็นจุดปลายของ $[a,b]$ $\Big\langle$ $\alpha = a, \beta = b$; $\beta = a, \alpha = b$

จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in [a,b]$

$$f(a) = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = f(b) = f(a)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(a) = f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$



นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน $[a,b]$
ส่งผลให้ $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

กรณีที่ 2: ถ้า $\alpha \in (a,b)$ เพราะฉะนั้น α เป็นจุดที่ f ให้ค่าต่ำสุดบน (a,b) และ f หาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
ดังนั้น โดย Interior Extremum Theorem จะได้ว่า $f'(\alpha) = 0$
และในที่นี้ เลือก $c := \alpha \in (a,b)$ และ $f'(c) = 0$

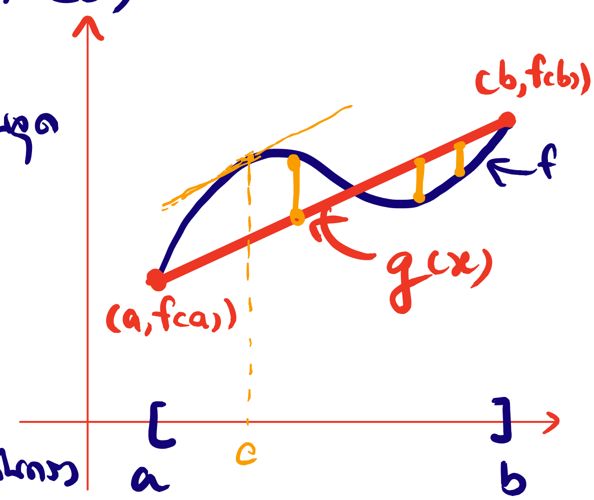
กรณีที่ 3: ถ้า $\beta \in (a,b)$ เพราะฉะนั้น f หาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
และ β เป็นจุดที่ f ให้ค่าสูงสุดบน (a,b) ซึ่งทำให้ได้ว่า $f'(\beta) = 0$
และในที่นี้ เลือก $c := \beta \in (a,b)$ และ $f'(c) = 0$

$\square$

ทฤษฎีบท: Mean Value Theorem

ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
จะได้ว่า มี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



พิสูจน์ พิจารณา เส้นตรงเชื่อมกราฟที่ผ่านจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ จะได้
ความชันของเส้นตรงเส้นนี้ คือ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ดังนั้น สมการของจุดใดๆ บนเส้นตรงเส้นตรง
นี้คือ

$$y - f(a) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad y = f(a) + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

นิยามฟังก์ชัน $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ โดย

$$\checkmark \quad g(x) = f(a) + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) \quad \forall x \in [a,b]$$

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

⊛ นิยามฟังก์ชัน $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ โดย

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ จึงได้ว่า h ต่อเนื่องบน $[a,b]$

และเนื่องจาก f และ g หาอนุพันธ์ได้บน (a,b) จึงได้ว่า h หาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

[Rolle's Thm: f: cont. $[a,b]$, diff. (a,b)
ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้ว $\exists c \in (a,b) \ni f'(c) = 0$]

สังเกตว่า
$$h(a) = f(a) - g(a)$$
$$= \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(a-a) = 0$$

และ
$$h(b) = f(b) - g(b)$$
$$= \cancel{f(b)} - \cancel{f(a)} - \left(\frac{\cancel{f(b)-f(a)}}{\cancel{b-a}}\right)(\cancel{b-a}) = 0$$

ดังนั้น $h(a) = h(b)$ ดังนั้นโดย Rolle's Thm จึงได้ว่า มี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้
$$0 = h'(c) = (f-g)'(c)$$
$$= f'(c) - g'(c)$$

เนื่องจาก
$$g(x) = f(a) + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$
$$\Rightarrow \quad g'(x) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\frac{d}{dx}(x-a)$$
$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

มีค่าคือ $g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

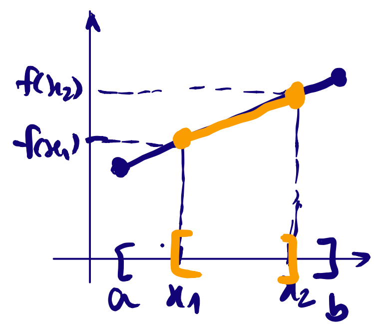
ส่งผลให้ $0 = f'(c) - g'(c)$

$$= f'(c) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$\square$

บทแทรก : ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
ถ้า $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน $[a,b]$



พิสูจน์ สมมติให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันคงตัวบน $[a,b]$ ดังนั้น จะมี $x_1, x_2 \in (a,b)$ ที่ $x_1 \neq x_2$ และ $f(x_1) \neq f(x_2)$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[x_1,x_2]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (x_1,x_2) โดย MVT จะได้ว่า มี $c \in (x_1,x_2)$ ที่ทำให้

$$0 = f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$$

ดังนั้น เกิดข้อขัดแย้ง จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน $[a,b]$

$\square$

ทฤษฎีบท: ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$
และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
ถ้า $f'(x) = g'(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$
แล้ว จะมีค่าคงตัว C ที่ทำให้
$$f(x) = g(x) + C$$

$f-g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$

$\therefore$ โดยบทแทรกเมื่อกี้ จะได้ว่า

ฟังก์ชัน $f-g$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว มีค่าคงตัว C ที่ทำให้

นั่นคือ $(f-g)(x) = C$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$

$\therefore$ $f(x) - g(x) = C \Rightarrow f(x) = g(x) + C$