4.3 L'Hospital's Rule

ทฤษฎีบท: Cauchy Mean Value Theorem

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) จะได้ว่า มี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $h:[a,b] \to \mathbb{R}$ โดย

$$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

และประยุกต์ใช้ Rolle's Theorem พิสูจน์ต่อ (ฝาก!)

$\square$

ทฤษฎีบท: (L'Hospital Rule)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) สมมติให้ $c \in (a,b)$ ที่ $f(c) = g(c) = 0$
ถ้า $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b) \cap N^*(c;\varepsilon)$

และ:

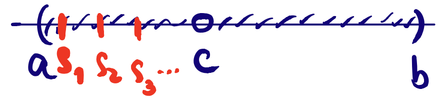
$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$$

แล้ว

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $U := (a,b) \cap N^*(c;\varepsilon)$

ให้ $(s_n)_{n\geq 1} \subset U$ ที่ $\lim_{n\to\infty} s_n = c$



ใช้ทฤษฎี The Cauchy mean value theorem จะได้ว่ามีลำดับ $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ ที่ c_n อยู่ระหว่าง s_n และ c และ

$$(f(s_n)-f(c))\,g'(c_n) = (g(s_n)-g(c))\,f'(c_n) \quad \forall n \geq 1$$

เนื่องจาก $g(c)=0$ และ $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in U$ จะได้ว่า $g(x) \neq 0 \ \forall x \in U$

(Why?)

สมมติว่า มี $x_0 \in U$ ที่ $g(x_0)=0$ และ $g(c)=0$ และเราทราบว่า g ต่อเนื่องบน $[c,x_0]$ และ g หาอนุพันธ์ได้บน $[c,x_0]$ ใช้ Rolle's Theorem จะได้ว่ามี $d \in \underbrace{(c,x_0)}_{\subset U}$ ที่ทำให้ $g'(d)=0$ ↯

ใช้ข้อ $g(x) \neq 0 \ \forall x \in U$

เราทราบว่า สำหรับแต่ละ $n \geq 1$

$$(f(s_n)-f(c))\underbrace{g'(c_n)}_{\neq 0} = \underbrace{(g(s_n)-g(c))}_{\neq 0}f'(c_n)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f(s_n)-\overset{0}{f(c)}}{g(s_n)-\underset{0}{g(c)}} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f(s_n)}{g(s_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \quad \forall n \geq 1$$

เนื่องจาก $s_n \leq c_n \leq c \quad \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad c \le \lim_{n\to\infty} c_n \le c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = c$$

เนื่องจาก $\displaystyle \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \underset{(SCFL)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(s_n)}{g(s_n)} = L$$

$$\overset{\lim_{n\to\infty} s_n = c}{\underset{(SCFL)}{\Longrightarrow}} \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \square$$

บทนิยาม: ลิมิตที่อนันต์

ให้ $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า

- $L\in\mathbb{R}$ เป็นลิมิตของ f เมื่อ $x\to+\infty$ ถ้า
  สำหรับทุก $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง $r_0>a$ ที่ทำให้
  สำหรับทุก $x>r_0$ จะได้ว่า $|f(x)-L|<\varepsilon$
  แทนโดยสัญลักษณ์ $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

- f ลู่ออกสู่ $+\infty$ เมื่อ $x\to+\infty$ ถ้า
  สำหรับทุก $M\in\mathbb{R}$ จะมีจำนวนจริง $r_0>a$ ที่ทำให้
  สำหรับทุก $x>r_0$ จะได้ว่า $f(x)>M$

ตัวอย่าง: จงแสดงว่า $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ เมื่อ $x\ge 0$

วิธีทำ:

ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $\boxed{r_0 = \frac{1}{\varepsilon}}$

$\frac{1}{r_0} > \frac{1}{x}$

ดังนั้น สำหรับทุก $x > r_0$ จะได้ว่า

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x+1} - 0\right| = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{r_0} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ $\blacksquare$

<u>ตัวอย่าง</u>: จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $M \in \mathbb{R}$ และเลือก $\boxed{r_0 = M^2}$

ดังนั้น สำหรับทุก $x > r_0$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sqrt{x} > \sqrt{r_0} = \sqrt{M^2} = |M| \geq M$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\blacksquare$

<u>ทฤษฎีบท</u>: ให้ $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$
ถ้า $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{k}{f(x)} = 0$

<u>พิสูจน์</u> (ลองทำ!)

ทฤษฎีบท: (L'Hospital's Rule)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้บน $(a,+\infty)$

สมมติให้ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ และ

$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,+\infty)$

ถ้า $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ แล้ว $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.