5.2 สมบัติของ Riemann Integrals

ทฤษฎีบท: ให้ f เป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotone function) บน $[a,b]$ จะได้ว่า f เป็น integrable บน $[a,b]$

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็น monotone function บน $[a,b]$

$\Rightarrow$ f: increasing บน $[a,b]$

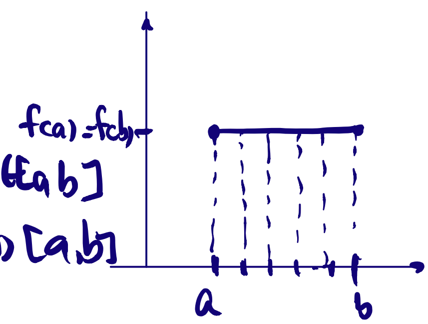
หรือ f: decreasing บน $[a,b]$

สมมติให้ f เป็น increasing function บน $[a,b]$

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

ทำให้ f เป็น bounded function บน $[a,b]$

กรณี 1: $f(a) = f(b)$



ทำให้ $f(x) = f(a) = f(b), \ \forall x \in [a,b]$

ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็น partition ของ $[a,b]$

พิจารณา

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(a)\Delta x_i = f(a)\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = f(a)(b-a)$$

และ $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(a)\Delta x_i = f(a)(b-a)$

ดังนั้น $\overline{\int_a^b} f \leq U(f,P) = f(a)(b-a) = L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f$

ดังนั้น $\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f \Rightarrow f$: Riemann integrable บน $[a,b]$

กรณีที่ 2: สมมติให้ $f(a) < f(b)$

ให้ $\varepsilon > 0$ [จะแสดงว่ามี partition P ที่ $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$]

จากสมบัติ (AP) จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{(f(b) - f(a))}$$

ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็น partition ของ $[a,b]$ โดยที่ $\Delta x_i < \frac{1}{n_0}$ $\forall i = 1, \dots, n$

ดังนั้น เนื่องจาก f เป็น increasing function

$$f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i), \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\Rightarrow M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i), \forall i = 1, \dots, n$$

และ

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}), \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

และ: $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$

ดังนั้น

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\Delta x_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\frac{1}{n_0}$$

$$= \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)$$

$$= \frac{1}{n_0}\big(f(x_n) - f(x_0)\big)$$

$$= \frac{1}{n_0}\big(f(b) - f(a)\big)$$

$$< \frac{\varepsilon\cancel{(f(b) - f(a))}}{\cancel{(f(b) - f(a))}} = \varepsilon$$

ทำให้ f เป็น Riemann integrable บน $[a,b]$ $\square$

อีกฟังป้ว(ฝาก!)

ทฤษฎีบท: ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ จะได้ว่า f เป็น Riemann integrable บน $[a,b]$

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน $[a,b]$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก f เป็น (UC) จะได้ว่า มี $\delta > 0$ ที่ทำให้ สำหรับทุก $x,y \in [a,b]$ ที่ $|x-y| < \delta$ จะได้ว่า $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็น partition ของ $[a,b]$ โดยที่ $\Delta x_i < \delta$, $\forall i = 1,\ldots,n$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[x_{i-1},x_i]$ จะได้ว่า f มีค่าสูงสุด/ต่ำสุด บน $[x_{i-1},x_i]$ นั่นคือ จะมี $s_i, t_i \in [x_{i-1},x_i]$ ที่ทำให้

$$f(s_i) = \sup f([x_{i-1},x_i]) = M_i(f)$$

และ

$$f(t_i) = \inf f([x_{i-1},x_i]) = m_i(f)$$

เนื่องจาก $|x_i - x_{i-1}| = \Delta x_i < \delta$ และ $s_i, t_i \in [x_{i-1},x_i]$

$$|s_i - t_i| \le |x_i - x_{i-1}| < \delta$$

จึงได้ว่า

$$|f(s_i) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

พิจารณา

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(f)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i(f)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(s_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big(f(s_i)-f(t_i)\big)\Delta x_i$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{(b-a)}\Delta x_i$$

$$=\frac{\varepsilon}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}}=\varepsilon$$

เพราะฉะนั้น f เป็น Riemann integrable บน $[a,b]$

$\square$