(7) The comparison test: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ที่

$$0 \le a_n \le b_n \text{ สำหรับทุก } n \ge 1$$

✓ ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \underset{=}{<} +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{=}{<} +\infty$

ถ้า $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

$= +\infty$

$$\sum a_n \, (\le) \, \sum b_n$$

$< +\infty$

ตัวอย่าง: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n}$

วิธีทำ $n > 0 \Rightarrow 2n^2+n > 2n^2 \ge n^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2n^2+n}}_{a_n} < \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{2n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ $\forall n \ge 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

โดย the Comparison test จึงได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n} < +\infty$ $\square$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n-2}$

วิธีทำ พิจารณา $5n > 5n-2 \Rightarrow \frac{1}{5n} < \frac{1}{5n-2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{3}{5n}}_{a_n} < \underbrace{\frac{3}{5n-2}}_{b_n}, \ \forall n \ge 1$$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} = \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$

เนื่องจาก $\frac{3}{5n} < \frac{3}{5n-2}$ $\forall n \geq 1$ จึงสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n-2} = +\infty$ □

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{n} > 0 \Rightarrow 2^n+\sqrt{n} > 2^n$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}}_{a_n} < \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{b_n}, \forall n \geq 1$$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n < +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}} < +\infty$$

□

The limit Comparison test

(8) **The limit comparison test:** พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ที่

$$a_n \geq 0 \text{ และ } b_n > 0 \text{ สำหรับทุก } n \geq 1 \text{ และ } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$$

ถ้า $L = 0$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

ถ้า $0 < L < +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < / = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < / = +\infty$

ถ้า $L = +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ตัวอย่าง:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{2n+1}{n^2+2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

พิจารณา เลือก $b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

และ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2+2n+1}}{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = 2$$

ดังนั้น โดย the limit comparison test จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = +\infty$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2^n}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{3^n+2^n} \quad \forall n \geq 1$

และเลือก $b_n = \frac{1}{3^n} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n < +\infty$$

และ: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n+2^n}}{\frac{1}{3^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น โดย the limit comparison test จึงสรุปได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2^n} < +\infty$$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3-2n^2+4}{n^7-n^3+2}$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{1+n\ln n}{n^2+5} \quad \forall n \geq 1$

แสดงว่าเลือก $b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

และ
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \xrightarrow{} 0 + \ln n \xrightarrow{} +\infty}{1+\frac{5}{n^2} \xrightarrow{} 0} = +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5} = +\infty$ $\square$

5.3 อนุกรมสลับ

อนุกรมสลับคือ อนุกรมที่อยู่ในรูป
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{โดยที่} \quad a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$$

(9) The (Leibniz's) alternating series test: พิจารณาอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ที่

$$a_n \geq 0 \text{ และ } \underline{a_n \geq a_{n+1}} \text{ สำหรับทุก } n \geq 1 \quad ①$$

ถ้า $\underline{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$ ② แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n < +\infty$

ตัวอย่าง: (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

วิธีทำ พิจารณา $a_n = \dfrac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

ดังนั้น $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < +\infty$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-n)}{n(n+1)}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-n)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)}{n(n+1)}$$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{n-1}{n(n+1)} \quad \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \left[f'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{(x^2+2x)^2} < 0 \right]$

และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-n)}{n(n+1)} < +\infty$ □