ทฤษฎีบท: ให้ $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
มีฟังก์ชัน $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$f(n) = a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n}$

วิธีทำ กำหนด $a_n = \dfrac{n}{\ln n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ มีฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \quad \forall x\in(0,+\infty)$

จะได้
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} \qquad \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1/x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n} = +\infty$ $\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{e^n}}{e^n}$

วิธีทำ กำหนด $a_n = \dfrac{e^{e^n}}{e^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

⇒ พิจารณาฟังก์ชัน $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ โดย

$$f(x)=\frac{e^{e^x}}{e^x}\quad \forall x\in(0,+\infty)$$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{e^x}}{e^x}$ $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{e^x}\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{e^x} = +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{e^n}}{e^n}=+\infty$ $\square$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n)}{\sqrt{n}}$ (0)

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ (1)

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

วิธีทำ $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$$

พิจารณา

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x}}\left(\frac{1}{(x+1)^{\cancel{2}}}\right)\left(-x^{\cancel{2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x-1+1}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-1 + \frac{1}{x+1}\right) = -1$$

Hence $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = -1$

$$\parallel$$

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right) = -1$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ $\square$

ทฤษฎีบท: ให้ $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $f: D_f \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

ถ้า ① $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

และ ② f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด L

แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$$

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

และ $f(x) = \sqrt{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

เนื่องจาก $f(x) = \sqrt{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

$\square$

4. ลำดับทางเดียว (Monotone sequences)

บทนิยาม: ให้ $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เราจะกล่าวว่า

- $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม (nonincreasing sequence)

ถ้า

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$a_{n+1} - a_n \leq 0$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับไม่ลด (nondecreasing sequence)

ถ้า

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับทางเดียว ถ้า $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม หรือไม่ลด

บทนิยาม: ให้ $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เราจะกล่าวว่า

- $(a_n)_{n\geq 1}$ มีขอบเขตบน (bounded above) ถ้า
  $\exists U \in \mathbb{R}$ ที่ $a_n \leq U \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ มีขอบเขตล่าง (bounded below) ถ้า
  $\exists L \in \mathbb{R}$ ที่ $a_n \geq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ มีขอบเขต (bounded) ถ้า $(a_n)_{n\geq 1}$ มีขอบเขตบน และขอบเขตล่าง

ทฤษฎีบท: ถ้า $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

- ถ้า $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับไม่ลดและมีขอบเขตบน แล้ว $(a_n)_{n\geq 1}$ ลู่เข้า
- ถ้า $(a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มและมีขอบเขตล่าง แล้ว $(a_n)_{n\geq 1}$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง: จงตรวจสอบว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่

(1) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\geq 1}$

วิธีทำ พิจารณา $a_n = \frac{n+1}{n}$ และ $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

พิจารณา $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \cdots = ?$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+\cancel{2n}-\cancel{n^2}-\cancel{2n}-1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)} \leq 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$

$\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

$\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับทางเดียว

$\square$

ตัวอย่าง: จงตรวจสอบว่าลำดับ $(\ln n)_{n\geq 1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ
$$\left[\begin{array}{l} f'(x) < 0 \Rightarrow f : \text{ลด} \\ f'(x) > 0 \Rightarrow f : \text{เพิ่ม} \end{array}\right]$$

① พิจารณา $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow f$: เพิ่ม

ดังนั้น ลำดับ $(\ln n)_{n\geq 1}$ เป็นลำดับไม่ลด

② เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$

ดังนั้น $(\ln n)_{n\geq 1}$ ลู่ออก

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่า ลำดับต่อไปนี้ ลู่ออกหรือลู่เข้า

① $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ monotone, bounded

② $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n\geq 1}$ monotone, bounded